हल प्रश्न-पत्र 2011

प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक भर्ती परीक्षा

(गणित)

दिनांक **16-06-2016**

1. यदि $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ तथा $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ एक-दूसरे के कोणार्धक हैं, तब :
(a) $p + q = 1$ (b) $pq = 1$
(c) $pq + 1 = 0$ (d) $p^2 + pq + q^2 = 0$

2. किसी त्रिभुज के शीर्ष (0, 3), (–3, 0) तथा (3,0) हैं, तो लम्ब-केन्द्र के निर्देशांक होंगे :
(a) (0,–2) (b) (0, 2) (c) (0, 3) (d) (0, –3)

3. रेखा $4x - 5y + 8 = 0$ पर बिन्दु (2, 3) से डाले गए लम्ब के पाद के निर्देशांक होंगे :
(a) (0, 0) (b) (1, 1)
(c) $\left(\frac{41}{78}, \frac{128}{75}\right)$ (d) $\left(\frac{78}{41}, \frac{128}{41}\right)$

4. बिन्दु (2,– 3) से वृत्त $2x^2 + 2y^2 = 1$ के स्पर्शी की लम्बाई है :
(a) 5 (b) –5
(c) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$

5. दो वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ तथा $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, एक-दूसरे को वास्तविक तथा भिन्न बिन्दुओं पर काटेंगे, यदि r का मान है :
(a) $2 < r < 8$ (b) $r = 2$ या $r = 8$
(c) $r < 2$ या $r < 8$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि परवलय $y^2 - kx + 8 = 0$ की नियता $x - 1 = 0$ है, तब k का मान है :
(a) $\frac{1}{6}$ (b) 8 (c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

7. परवलय $y^2 = 4x$ की सभी जीवाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दु पथ, यदि जीवाएँ शीर्ष से खींची गयी हैं, है :
(a) $y^2 = 8x$ (b) $y^2 = 2x$
(c) $x^2 + 4y^2 = 16$ (d) $x^2 = 2y$

8. समीकरण $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-6} + 1 = 0$ दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगी, यदि :
(a) $r > 2$ (b) $r > 6$
(c) $2 < r < 6$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. रेखा $lx + my + n = 0$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अभिलम्ब है, यदि :
(a) $\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{l^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$
(b) $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$
(c) $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

10. यदि दो शांकवों S_1 तथा S_2 की उत्केन्द्रताएँ e_1 तथा e_2 हैं, तथा $e_1^2 + e_2^2 = 3$, तब दोनों S_1 तथा S_2 होंगे :
(a) दीर्घ वृत्त (b) परवलय
(c) अतिपरवलय (d) वृत्त

11. अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 3$ के किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा, दी गई रेखा $2x + y + 8 = 0$ के समान्तर होगी?
(a) (2, 1) या (1, 2) (b) (2,– 1) या (–2,1)
(c) (–1,– 2) (d) (–2,– 1)

12. समी. $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0, (a \neq 0)$ एक गोला प्रदर्शित करेगी यदि :
(a) $u^2 + v^2 + w^2 - d \geq 0$
(b) $u^2 + v^2 + w^2 - ad \geq 0$
(c) $u^2 + v^2 + w^2 - d \leq 0$
(d) $u^2 + v^2 + w^2 - ad \leq 0$

13. तीनों कार्तीय अक्षों तथा रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ से गुजरने वाले शंकु की समीकरण है :
(a) $yz - 2zx + 3xy = 0$
(b) $3yz - zx + xy = 0$
(c) $3yz + 16zx + 15xy = 0$
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

14. निम्न में से कौन-सा युग्म समान शांकवों को निरूपित करेगा?
(a) $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta, \frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$
(b) $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta, \frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$
(c) $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta, \frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta$
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

15. समतल $2x-2y+z+12=0$, गोला $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ को निम्न बिन्दुओं पर स्पर्श करेगा :
(a) $(1,-4,-2)$ (b) $(-1,4,-2)$
(c) $(-1,-4,2)$ (d) $(1,4,-2)$

16. यदि $f(a)=2,\ f'(a)=1,\ g(a)=-1,\ g'(a)=2,$ तब $\lim_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-g(a)f(x)}{x-a}$ का मान होगा :
(a) -5 (b) $\frac{1}{5}$
(c) 5 (d) 0

17. यदि $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+---\infty}}}$, तब $\frac{dy}{dx}=$
(a) 1 (b) $\frac{1}{xy}$
(c) $\frac{1}{2y-x}$ (d) $\frac{1}{2y-1}$

18. यदि $f(x)=\begin{vmatrix} x^3 & \sin x & \cos x \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$, जहाँ p एक नियतांक है, तब $x=0$ पर $\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ का मान है :
(a) p (b) $p+p^2$
(c) $p+p^3$ (d) p से स्वतन्त्र

19. दिए गए वक्र का अभिलम्ब x-अक्ष के समान्तर है यदि :
(a) $\frac{dy}{dx}=0$ (b) $\frac{dy}{dx}=1$
(c) $\frac{dx}{dy}=0$ (d) $\frac{dx}{dy}=1$

20. वक्र $y=-x^3+3x^2+9x-27$ का महत्तम ढाल है :
(a) 0 (b) 12 (c) 16 (d) 32

21. यदि फलन $f(x)=x^{1/x}, x>0$ का मान $x=e$ पर महत्तम है, तब :
(a) $e^\pi>\pi^e$ (b) $e^\pi<\pi^e$
(c) $e^\pi=\pi^e$ (d) $e^\pi\le\pi^e$

22. $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$ का मान है :
(a) $\log\tan x+c$ (b) $e^x\tan\frac{x}{2}+c$
(c) $\sin\log x+c$ (d) $e^x\cot x+c$

23. यदि $\int\frac{dx}{(\sin x+4)(\sin x-1)}=\frac{A}{\tan\frac{x}{2}-1}+B\tan^{-1}(f(x))+c$, तब :
(a) $A=\frac{1}{5}, B=-\frac{2}{5\sqrt{15}}, f(x)=\frac{4\tan x+3}{\sqrt{15}}$
(b) $A=\frac{-1}{5}, B=\frac{1}{\sqrt{15}}, f(x)=\frac{4\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{15}}$
(c) $A=\frac{2}{5}, B=-\frac{2}{5\sqrt{5}}, f(x)=\frac{4\tan x+1}{\sqrt{5}}$
(d) $A=\frac{2}{5}, B=-\frac{2}{\sqrt{15}}, f(x)=\frac{4\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{5}}$

24. $|x|$ का समाकलन यदि $x<0$, है :
(a) $\frac{x^2}{2}+c$ (b) $-\frac{x^2}{2}+c$
(c) $x+c$ (d) $-x+c$

25. समाकलन $\int_0^{1.5}[x^2]dx$ का मान है (जबकि $[x]$ एक महत्तम पूर्णांक है $\le x$) :
(a) $2+\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$ सतत् फलन है, तब $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[f(x)+f(-x)][g(x)-g(-x)]dx$ का मान है :
(a) π (b) 1 (c) -1 (d) 0

27. यदि $a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x dx$, तब a_2+a_4, a_3+a_5 तथा a_4+a_6 निम्न में होंगे :
(a) स. श्रे. में (b) गु. श्रे. में
(c) ह. श्रे. में (d) इनमें से कोई नहीं

28. $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}e^{r/n}$ का मान है :
(a) e (b) $e-1$ (c) $1-e$ (d) $e+1$

29. x-अक्ष से ऊपर, वक्र $y^2(2a-x)=x^3$ तथा रेखा $x=2a$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है :
(a) πa^2 (b) $\frac{3\pi a^2}{2}$
(c) $2\pi a^2$ (d) $3\pi a^2$

30. $x=0$ तथा $x=4$ के मध्य घिरा, चाप $y=\sqrt{1+x^2}$ को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित आयतन है :
(a) $\frac{8\pi}{3}$ (b) $\frac{49\pi}{3}$ (c) $\frac{65\pi}{3}$ (d) $\frac{76\pi}{3}$

31. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ की कोटि है :
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

32. अवकल समीकरण $2x\frac{dy}{dx}-y=3$ के हल से प्रदर्शित वक्र है :
(a) सरल रेखा (b) वृत्त
(c) परवलय (d) दीर्घवृत्त

33. अवकल समीकरण $\tan y\sec^2 x\,dx+\tan x\sec^2 y\,dy=0$ का हल है :
(a) $\tan x+\tan y=k$ (b) $\tan x-\tan y=k$
(c) $\frac{\tan x}{\tan y}=k$ (d) $\tan x\cdot\tan y=k$

34. यदि समीकरण $x(1-x^2)dy+(2x^2y-y-ax^3)dx=0$ का अवकल गुणनखण्ड (I.F.) $e^{\int pdx}$ है, तब p का मान है :
(a) $\frac{2x^2-ax^3}{x(1-x^2)}$ (b) $2x^3-1$
(c) $\frac{2x^2-1}{ax^3}$ (d) $\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}$

35. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ का हल है :

(a) $y - \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$ (b) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

(c) $x + \sqrt{x^2 + y^2} = cy^2$ (d) $x - \sqrt{x^2 + y^2} = cy^2$

36. दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, तब दोनों सदिशों के बीच का कोण होगा :

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप (Projection) है :

(a) $\frac{5\sqrt{5}}{19}$ (b) $2\frac{1}{9}$

(c) $\frac{9}{19}$ (d) $\frac{\sqrt{6}}{19}$

38. सदिश $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ तथा $2\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ एक समतलीय हैं, तब λ का मान है :

(a) –2 (b) 0

(c) 1 (d) –1

39. यदि दो इकाई सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$, x–अक्ष से क्रमशः 30° तथा 120° का कोण बनाते हैं, तब $|\vec{a} + \vec{b}|$ का मान होगा :

(a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3}$ (d) 2

40. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot [\vec{b} - \vec{c}] \times (\vec{c} - \vec{a})$ का मान है :

(a) 0 (b) $2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

(c) $3[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$, $-3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$ संरेख हो, तो λ का मान होगा :

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

42. बल $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ द्वारा चलित वस्तु पर सदिश $\vec{d} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ के सापेक्ष गतिमान करने में किया गया कार्य है :

(a) 12 इकाई (b) 11 इकाई

(c) 10 इकाई (d) 9 इकाई

43. बिन्दु $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के परितः तथा बिन्दु $(-2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ पर कार्यरत बल $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा उत्पन्न आपूर्ण है :

(a) $3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ (b) $3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

(c) $3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि Δ *ABC* का अन्तःकेन्द्र *I* है तथा भुजाओं *BC*,*CA* तथा *AB* की लम्बाइयाँ क्रमशः *a*,*b*,*c* हों, तो $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}$ का मान होगा :

(a) $\vec{0}$ (b) $\vec{AB}$

(c) $\vec{AC}$ (d) $\vec{AD}$

45. बल युग्म $\vec{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $-\vec{F}$ द्वारा क्रमशः बिन्दुओं $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ पर कार्यरत आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$

(c) $4\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{5}$

46. यदि $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, तब श्रेणी Σa_n है :

(a) आन्दोलित (कम्पित)

(b) अपसारी

(c) अभिसारी

(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

47. श्रेणी $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$ है :

(a) अभिसारी (b) अपसारी

(c) आन्दोलित (कम्पित) (d) इनमें से कोई नहीं

48. धनात्मक पदों की श्रेणी Σu_n, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n + 1} > 1$ या < 1 के अनुसार अभिसारी या अपसारी होगी। इस प्रयोग का नाम है :

(a) तुलनात्मक जाँच (b) रेबी की जाँच

(c) डी एलम्बर्ट की जाँच (d) कोशी की संघनित जाँच

49. प्रत्येक कोशी श्रेणी है :

(a) अपरिबद्ध (b) परिबद्ध

(c) अनन्त (d) इनमें से कोई नहीं

50. 'प्रत्येक परिबद्ध श्रेणी में एक केन्द्रिक बिन्दु होता है' यह कथन : जाना जाता है

(a) कोशी का प्रमेय (b) विस्ट्रास का प्रमेय

(c) बोलजेनो-विस्ट्रास प्रमेय (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ab + cd)x + c^2 + d^2 = 0$ कोई वास्तविक मूल नहीं रखता है, तब :

(a) $ad = bc$ (b) $ab = cd$

(c) $ac = bd$ (d) $ad \neq bc$

52. यदि $\log_{10}(x^2 - 6x + 45) = 2$, तब x के मान होंगे :

(a) 6, 9 (b) 9, –5

(c) 10, 5 (d) 11, –5

53. प्रत्येक प्रतिबद्ध अनुक्रम में है :

(a) एक अपसारी उप-अनुक्रम

(b) एक अभिसारी उप-अनुक्रम

(c) एक अपसारी अनुक्रम

(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

54. श्रेणी $\Sigma\left(\frac{1}{np}\right)$ अपसारी है, यदि :

(a) $p \geq 1$ (b) $p < 1$

(c) $p \leq 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. श्रेणी Σu_n के अभिसारी होने की आवश्यक शर्त है कि :

(a) $\lim_{n\to\infty} u_n \to 0$ (b) $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

(c) $\lim_{n\to\infty} u_n = -1$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. एक समतल के एक बिन्दु पर तीन बल लगे हैं। P तथा Q के मध्य कोण $150°$ तथा Q,R के मध्य कोण $120°$ हैं। सन्तुलन की स्थिति में बल P,Q,R में अनुपात होगा :
(a) $1:2:3$ (b) $1:2:\sqrt{3}$
(c) $3:2:1$ (d) $\sqrt{3}:2:1$

57. दो समान बलों का परिणामी उनमें से किसी एक के बराबर है। बलों के बीच का कोण है :
(a) $45°$ (b) $60°$
(c) $90°$ (d) $120°$

58. त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के सापेक्ष लगे बलों का परिणामी त्रिभुज के परिवृत्त के केन्द्र से गुजरता है, तब :
(a) $P\sin A + Q\sin B + R\sin C = 0$
(b) $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$
(c) $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$
(d) $P\tan A + Q\tan B + R\tan C = 0$

59. समान पदार्थ के बने क्रमश: 6 सेमी तथा 3 सेमी त्रिज्या वाले दो एकसमान गोलों को एक साथ जोड़ दिया गया है। पूरे निकाय का गुरुत्व केन्द्र बड़े गोले के केन्द्र से कितनी दूरी पर होगा?
(a) 1 सेमी (b) 3 सेमी
(c) 2 सेमी (d) 4 सेमी

60. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$ का मान होगा :
(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) 67

61. दो बिन्दु A तथा B को क्रमश: 5 मी तथा 20 मी की ऊँचाई से छोड़ा गया है। तब A द्वारा जमीन पर पहुँचने में लिया गया समय तथा B द्वारा जमीन पर पहुँचने में लिया गया समय में अनुपात है :
(a) $1:4$ (b) $2:1$
(c) $1:2$ (d) $1:1$

62. एक व्यक्ति एक लिफ्ट में खड़ा है, जो कि 'f' त्वरण से ऊपर की ओर जा रही है। व्यक्ति भारी महसूस होगा :
(a) वास्तविक भार का $(f+g)$ गुना
(b) वास्तविक भार का $(f-g)$ गुना
(c) वास्तविक भार का (fg) गुना
(d) वास्तविक भार का $\frac{f}{g}$ गुना

63. एक कोण को क्षैतिज से $45°$ का कोण बनाते हुए $49\sqrt{2}$ मी/से की गति से प्रक्षेपित किया जाता है। यह प्रक्षेप की दिशा से समकोणिक दिशा कितने समय बाद होगा?
(a) $10\sqrt{2}$ सेकण्ड (b) 10 सेकण्ड
(c) 8 सेकण्ड (d) 5 सेकण्ड

64. एक कण विराम से चलता है तथा नियत त्वरण से चलता है। m वें तथा $(m+1)$ वें सेकण्ड में गतिज ऊर्जाओं में वृद्धि का अनुपात होगा :
(a) $m:m$ (b) $(m+1):(m-1)$
(c) $2m-1:2m+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

65. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इकाई सदिश हों और θ उनके बीच का कोण हो, तो $\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|$ है :
(a) $\sin\frac{\theta}{2}$ (b) $\sin\theta$
(c) $2\sin\theta$ (d) $\sin 2\theta$

66. A तथा B एक काम को 12 दिनों में, B तथा C 15 दिनों में तथा C व A 20 दिनों में कर सकते हैं। A अकेला कितने दिनों में उसी काम को करेगा?
(a) $15\frac{2}{3}$ (b) 24
(c) 30 (d) 40

67. एक व्यक्ति प्रथम 50 किमी, 25 किमी/घण्टे की चाल से, अगले 40 किमी, 20 किमी/घण्टा से तथा अंतिम 90 किमी, 15 किमी/घण्टा की चाल से चलता है। पूरी यात्रा की उसकी औसत चाल होगी :
(a) 25 (b) 20
(c) 18 (d) 40

68. एक धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में दोगुना हो जाता है। यह 8 गुना हो जाएगा :
(a) 30 वर्षों में (b) 40 वर्षों में
(c) 45 वर्षों में (d) 60 वर्षों में

69. $(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)(\log_8 9)$ का मान है :
(a) 2 (b) 7 (c) 8 (d) 33

70. समी. $3x-4y=5$ तथा $12x-16y=20$ में हल होंगे :
(a) कोई उभयनिष्ठ हल नहीं (b) केवल एक उभयनिष्ठ हल
(c) केवल दो उभयनिष्ठ हल (d) दो से ज्यादा उभयनिष्ठ हल

71. ₹ 53 को A,B,C में इस प्रकार विभाजित किया गया कि A को B से ₹ 7 ज्यादा, B को C से ₹ 8 ज्यादा प्राप्त हों। उसके हिस्सों में अनुपात होगा :
(a) $16:9:18$ (b) $25:18:10$
(c) $18:25:10$ (d) $15:8:30$

72. समी. $x^2+px+q=0$ के मूल 1 तथा 2 हैं, तो समी. $qx^2-px+1=0$ के मूल होंगे :
(a) $1, \frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}, -1$
(c) $-\frac{1}{2}, 1$ (d) $-1, \frac{1}{2}$

73. किसी त्रिभुज के अन्त:वृत्त का केन्द्र ज्ञात करते हैं :
(a) अभिलम्बों से (b) कोणों के अर्धकों से
(c) माध्यिकाओं से (d) भुजाओं के लम्बार्धकों से

74. यदि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है तथा बिन्दु A से आधार पर स्थित बिन्दु D पर लम्ब AD डाला गया है, तब :
(a) $AB^2 - AD^2 = BD \cdot DC$
(b) $AB^2 + AD^2 = BD \cdot DC$
(c) $AB^2 - AD^2 = BD^2 - DC^2$
(d) $AB^2 + AD^2 = BC^2 - DC^2$

75. किसी समषट्भुज के अन्तर्गत बने वृत्त की त्रिज्या r है, तब इसका परिमाप होगा :
(a) $6r$ (b) $3r$
(c) $9r$ (d) $12r$

76. निम्न में से कौन-सी केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है?
(a) माध्य (b) माध्यिका
(c) बहुलक (d) मानक विचलन

77. $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$ के प्रसार में, x^n का गुणांक होगा :
(a) $\frac{3^{n+1}-1}{2.3^{n+1}}$ (b) $\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}$
(c) $2\left(\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. 1, 3, 4, 5, 7, 4 का माध्य m है। नम्बर 3, 2, 2, 4, 3, 3, p का माध्य $m-1$ और माध्यिका q है, तब $p+q$ =
(a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 7

79. यदि $a^x = b^y = c^z$ और $b^2 = ac$, तब y =
(a) $\frac{xz}{x+y}$ (b) $\frac{xz}{2(x-z)}$
(c) $\frac{xz}{2(z-x)}$ (d) $\frac{2xz}{z+x}$

80. किसी बंटन का बहुलक ज्ञात किया जा सकता है :
(a) आयत चित्र द्वारा
(b) 'से कम' संचयी बारम्बारता वक्र द्वारा
(c) 'से अधिक' संचयी बारम्बारता वक्र द्वारा
(d) आवृत्ति बहुभुज द्वारा

81. निम्न सारणी से 250 व 300 के मध्य के आँकड़े ज्ञात कीजिए :

मान	200 से अधिक	250 से अधिक	300 से अधिक	350 से अधिक
आँकड़ों की संख्या	56	38	15	0

(a) 56 (b) 23
(c) 15 (d) 8

82. विभिन्न धनात्मक मानों के समुच्चय के लिए निम्न में से सत्य है :
(a) $AM \geq GM \geq HM$ (b) $HM \geq GM \geq AM$
(c) $AM > GM > HM$ (d) $GM > AM > HM$

83. कीमत आधारित जीवन सूचकांक (C.L.I.) को प्रदर्शित किया जाता है :
(a) $\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$ (b) $\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_0}$
(c) $\frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_n q_n} \times 100$ (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि 30 व 20 आकार के दो नमूनों का माध्य क्रमशः 55 व 60 तथा मानक विचलन क्रमशः 16 व 25 है, तब सभी 50 आकार के नमूनों का एक साथ मानक विचलन है :
(a) 5.00 (b) 5.06
(c) 5.23 (d) इनमें से कोई नहीं

85. यदि $P + \sqrt{3}Q + \sqrt{5}R + \sqrt{15}S = \frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, तब P का मान है :
(a) $\frac{7}{11}$ (b) $\frac{3}{11}$ (c) $-\frac{1}{11}$ (d) $-\frac{2}{11}$

86. एक विषम–सममित आव्यूह का क्रम (Rank) नहीं हो सकती है :
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 6

87. दो आव्यूह A तथा B विपरीत क्रम (anti-commute) होंगी, यदि :
(a) $AB = BA$ (b) $AB^2 = A^2B$
(c) $AB = -BA$ (d) $\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

88. निम्न में से सत्य कथन है :
(a) यदि A त्रिभुजाकार है, तब A^{-1} भी त्रिभुजाकार आव्यूह होगी
(b) यदि A कोई भी आव्यूह है, तब $\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)$
(c) यदि A तथा B, n घात की वर्ग आव्यूह है, तब $\text{adj}(AB) = (\text{adj}\, A)(\text{adj}\, B)$
(d) उपर्युक्त सभी असत्य हैं

89. यदि 3×3 आव्यूह के प्रत्येक अवयव को 3 से गुणा कर दें, तब नयी आव्यूह की सारणिक होगी :
(a) 3(det A) (b) 9(det A)
(c) 27(det A) (d) $(\text{det A})^3$

90. यदि समीकरणों के निकाय $x + 2y - 3z = 2$, $(k+3)z = 3$, $(2k+1)y + z = 2$ का हल है, तब k का मान है :
(a) –3 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

91. श्रेणी $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{15}} + \ldots$ के n पदों का योग है :
(a) $\frac{\sqrt{3+4n}+\sqrt{3}}{n}$ (b) $\frac{n}{\sqrt{3+4n}+\sqrt{3}}$
(c) $\sqrt{3+4n}+\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3+4n}+\sqrt{3}}$

92. एक समिति के 5 पुरुष व 2 महिलाओं को एक गोल मेज पर बैठाने के प्रकार होंगे, (यदि दोनों महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठें) :
(a) 480 (b) 600
(c) 720 (d) 840

93. यदि $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$, तब $\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r}$ का मान है :
(a) $(n-1)a_n$ (b) na_n
(c) $\frac{na_n}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

94. श्रेणी $1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \ldots$ का योगफल है :
(a) $5e-1$ (b) $5e-3$
(c) $4e$ (d) इनमें से कोई नहीं

95. किसी समस्या को हल करने का अनुपात A के पक्ष में 3:4 तथा B के विपक्ष में 5:7 है। यदि A तथा B दोनों समस्या हल करने का प्रयास करें, तो समस्या हल होने की प्रायिकता होगी :
(a) $\frac{41}{84}$ (b) $\frac{16}{21}$ (c) $\frac{5}{21}$ (d) $\frac{1}{4}$

96. आव्यूह समीकरण $AB = AC$ से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं, कि $B = C$ यदि :
(a) $|A| = 0$ (b) $|A| \neq 0$
(c) A सममित है (d) A वर्ग आव्यूह है

97. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, तब A है :
(a) निलपोटेन्ट आव्यूह (b) आईडेम्पोटेन्ट आव्यूह
(c) अदिश आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

98. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$, तब Δ का वर्ग अन्तराल होगा :
(a) [3, 4] (b) [2, 4]
(c) [1, 4] (d) इनमें से कोई नहीं

99. सारणिक $\begin{vmatrix} xp+y & x & y \\ yp+z & y & z \\ 0 & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$, यदि :
(a) x, y, z स. श्रे. में हैं
(b) x, y, z गु. श्रे. में हैं
(c) x, y, z ह. श्रे. में हैं
(d) xy, yz, zx स. श्रे. में हैं

100. शतरंज के बोर्ड पर आयतों की संख्या होगी :
(a) 144 (b) 1296
(c) 256 (d) इनमें से कोई नहीं

101. त्रिभुज ABC में, $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$ का मान है :
(a) 0 (b) rR
(c) Rr^2 (d) $a+b+c$

102. यदि $u = \log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$, तब $\cosh u$ का मान होगा :
(a) $\sec\theta$ (b) $\sin\theta$
(c) $\cos\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

103. $\sinh^{-1}3$ का मान है :
(a) $\log(3+\sqrt{10})$ (b) $\log(3-2\sqrt{2})$
(c) $\log(3+2\sqrt{2})$ (d) इसमें से कोई नहीं

104. $[\sqrt{-6}\sqrt{-6}]$ का मान है :
(a) 6 (b) –6
(c) $6i$ (d) $-6i$

105. यदि α तथा β विभिन्न सम्मिश्र संख्या हैं, तथा $|\beta| = 1$, तब $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान होगा :
(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) 2

106. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, जो $z^2 + z + 1 = 0$ को सन्तुष्ट करता है। यदि n, 3 का गुणक नहीं है, तो $z^n + z^{2n}$ का मान है :
(a) 2 (b) –2
(c) 0 (d) –1

107. $|z-1| = |z+i|$ से प्राप्त बिन्दु पथ है :
(a) त्रिज्या 1 इकाई का वृत्त
(b) (1, 0) तथा (0, –1) के फोकस वाला दीर्घवृत्त
(c) मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा
(d) (1, 0), (0, 1) को मिलाने वाले व्यास का वृत्त

108. यदि x, समीकरण $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ को सन्तुष्ट करता है, तब $x^n + \frac{1}{x^n}$ का मान है :
(a) $2^n \cos n\theta$ (b) $2^n \cos^n\theta$
(c) $2\cos n\theta$ (d) $2\cos^n\theta$

109. इकाई के nवें मूल होंगे :
(a) स. श्रे. में (b) गु. श्रे. में
(c) ह. श्रे. में (d) इनमें से कोई नहीं

110. यदि सम्मिश्र तल में स्थित, त्रिभुज के शीर्षों $z, z+iz$ तथा iz से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल 50 है, तब $|z|$ का मान है :
(a) 1 (b) 5
(c) 10 (d) 100

111. $x^2 - y^2 - 9z^2 + 6yz$ के गुणनखण्ड हैं :
(a) $(x + y - 3z)(x + y + 3z)$
(b) $(x - y - 3z)(x - y + 2z)$
(c) $(x + y - 3z)(x - y + 3z)$
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

112. यदि $A:B = 7:9$ और $B:C = 5:4$ तब $A:B:C$ है :
(a) 7:45:36
(b) 35:45:36
(c) 28:36:35
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

113. फलन $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \sin^{-1}\left(\frac{1+x^2}{zx}\right)$ परिभाषित है, यदि :
(a) $x \in \{-1, 1\}$ (b) $x \in [-1, 1]$
(c) $x \in R$ (d) $x \in (-1, 1)$

114. $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}$ का वास्तविक भाग है :
(a) 0 (b) 4
(c) –2 (d) इनमें से कोई नहीं

115. यदि $x\sin\theta = y\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = z\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$, तब $xy + yz + zx$ का मान है :
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

116. वर्ग अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में समीकरण $1 + \sin x \cdot \sin^2\frac{x}{2} = 0$ के वास्तविक हलों की संख्या है :
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

117. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ का मान है :

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{10\pi}{3}$ (d) 0

118. यदि त्रिभुज ABC में $\frac{2\cos A}{a}+\frac{2\cos B}{b}+\frac{2\cos C}{c}=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}$, तब कोण A का मान होगा :

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

119. त्रिभुज ABC में $a=5, b=7, \sin A=\frac{3}{4}$, तब बनने वाले त्रिभुजों की संख्या होगी :

(a) केवल एक त्रिभुज (b) दो त्रिभुज

(c) अनन्त त्रिभुज (d) कोई त्रिभुज नहीं

120. यदि $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$, तब $\frac{a+b+c}{c}$ का मान होगा :

(a) 7 (b) 2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{7}$

121. पूर्णांकों के समूह $(z,*)$ में, $a*b=a+b+1$ जबकि $a,b\in z$, तब -2 का प्रतिलोम होगा :

(a) -2 (b) 0

(c) -4 (d) 2

122. किसी समूह $(G,*)$ का उपसमुच्चय H एक समूह होगा, यदि और केवल यदि :

(a) $a,b\in H\Rightarrow a*b\in H$ (b) $a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$

(c) $a,b\in H\Rightarrow a*b^{-1}\in H$ (d) H में इकाई अवयव है

123. किसी समूह में, अनुचित उपसमूहों की संख्या है :

(a) 2 (b) 3

(c) समूह पर निर्भर (d) 1

124. किसी परिमित चक्रीय समूह (कोटि 28) में जनितों की संख्या होगी :

(a) 10 (b) 8

(c) 12 (d) 14

125. किसी समुच्चय A में R सम्बन्ध इस प्रकार है कि $R=R^{-1}$, तब R है :

(a) स्वतुल्य (b) सममित

(c) संक्रमक (d) उपर्युक्त में से कोई नहा

उत्तरमाला

1. (c)	**2.** (c)	**3.** (d)	**4.** (c)	**5.** (a)	**6.** (c)	**7.** (b)	**8.** (c)	**9.** (b)	**10.** (c)
11. (b)	**12.** (b)	**13.** (d)	**14.** (b)	**15.** (b)	**16.** (d)	**17.** (d)	**18.** (d)	**19.** (c)	**20.** (b)
21. (d)	**22.** (b)	**23.** (c)	**24.** (b)	**25.** (b)	**26.** (d)	**27.** (c)	**28.** (b)	**29.** (b)	**30.** (d)
31. (d)	**32.** (a)	**33.** (d)	**34.** (d)	**35.** (b)	**36.** (c)	**37.** (b)	**38.** (a)	**39.** (b)	**40.** (a)
41. (a)	**42.** (d)	**43.** (b)	**44.** (d)	**45.** (d)	**46.** (c)	**47.** (a)	**48.** (c)	**49.** (b)	**50.** (c)
51. (d)	**52.** (d)	**53.** (b)	**54.** (c)	**55.** (b)	**56.** (d)	**57.** (d)	**58.** (b)	**59.** (a)	**60.** (b)
61. (c)	**62.** (b)	**63.** (b)	**64.** (c)	**65.** (a)	**66.** (c)	**67.** (c)	**68.** (c)	**69.** (a)	**70.** (a)
71. (b)	**72.** (b)	**73.** (b)	**74.** (a)	**75.** (d)	**76.** (d)	**77.** (a)	**78.** (d)	**79.** (d)	**80.** (a)
81. (b)	**82.** (c)	**83.** (a)	**84.** (b)	**85.** (c)	**86.** (a)	**87.** (c)	**88.** (a)	**89.** (c)	**90.** (a)
91. (b)	**92.** (a)	**93.** (c)	**94.** (d)	**95.** (d)	**96.** (a)	**97.** (d)	**98.** (b)	**99.** (b)	**100.** (b)
101. (d)	**102.** (a)	**103.** (a)	**104.** (b)	**105.** (c)	**106.** (d)	**107.** (a)	**108.** (a)	**109.** (b)	**110.** (c)
111. (c)	**112.** (b)	**113.** (d)	**114.** (a)	**115.** (a)	**116.** (a)	**117.** (d)	**118.** (c)	**119.** (d)	**120.** (b)
121. (b)	**122.** (a)	**123.** (a)	**124.** (d)	**125.** (d)					

संकेत एवं हल

1. रेखाओं $x^2-2pxy-y^2=0$, के कोणार्धकों का समीकरण निम्न है :

$$\frac{x^2-y^2}{1-(-1)}=\frac{xy}{-p}$$

या $$\frac{x^2-y^2}{2}=\frac{-xy}{p}$$

या $$px^2+2xy-py^2=0 \quad \ldots(i)$$

अतः समी. (i), $x^2-2qxy-y^2=0$ के समान होगी। अतः समीकरण की तुलना करने पर

$$\frac{p}{1}=\frac{2}{-2q}=\frac{-p}{-1}$$

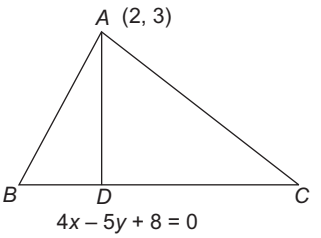
$\therefore$ $$pq+1=0$$

3. दिया गया समीकरण $4x-5y+8=0 \quad \ldots(i)$

तब $$y=\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}$$

$\therefore$ BC की प्रवणता $=\frac{4}{5}$

लम्ब AD की प्रवणता $= \frac{-5}{4}$



अतः लम्ब AD का समीकरण

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-5}{4}$$

$\Rightarrow$ $$5x + 5y = 22 \quad \text{...(ii)}$$

$\therefore$ बिन्दु D, $4x - 5y = -8$ तथा $5x + 4y = 22$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है। अतः समी. (i) व समी. (ii) से,

$$x = \frac{78}{41},\ y = \frac{128}{41}$$

अतः लम्ब के पाद के निर्देशांक $= \left(\frac{78}{41}, \frac{128}{41}\right)$

4. बिन्दु $(2, -3)$ से वृत्त $2x^2 + 2y^2 = 1$ के स्पर्शी की लम्बाई

$$= \sqrt{S_1}$$

यहाँ $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}$ तथा $x_1 = 2,\ y_1 = -3$

$\therefore$ $$\sqrt{S_1} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{13 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26-1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

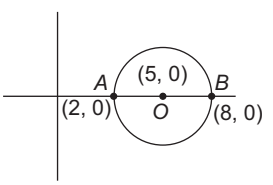
5. दिया गया समीकरण निम्न है :

$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$$

केन्द्र $= (-g, -f)$

$= (5, 0)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$



$= \sqrt{25 - 16} = 3$

$\therefore$ पहला वृत्त दूसरे वृत्त को काटेगा, यदि

$$2 < r < 8$$ $\therefore$ वृत्त का केन्द्र $(0,0)$ है

6. समीकरण $y^2 - kx + 8 = 0$

या $$y^2 = kx - 8$$

या $$y^2 = 4\left(\frac{k}{4}x - 2\right)$$

समी. $y^2 = 4ax$ से तुलना करने पर

$$a = 1,\ X = \frac{k}{4}x - 2$$

अतः नियता का समीकरण

$$X = -1$$

$$\frac{k}{4}x - 2 = -1$$

या $$\frac{kx}{4} = 1$$

या $$\frac{k}{4}x - 1 = 0$$

नियता के दिए गए समीकरण $x - 1 = 0$ से,

$$\frac{k}{4} = 1$$

$$k = 4$$

7. परवलय $y^2 = 4x$ की, सभी शीर्ष से खींची गई जीवाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी एक परवलय होगा। जिसके नाभिलम्ब की लम्बाई दिए गए परवलय के नाभिलम्ब की आधी होगी। अतः बिन्दु पथ $\Rightarrow y^2 = 2x$

8. $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-6} + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $$\frac{x^2}{r-2} + \frac{y^2}{6-r} = 1$$

यह समीकरण एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगी, यदि

$$r - 2 > 0 \text{ तथा } 6 - r > 0$$

$\Rightarrow$ $$r > 2 \text{ तथा } 6 > r$$

$\therefore$ $$2 < r < 6$$

9. यदि रेखा $lx + my + n = 0$, बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर दीर्घवृत्त पर अभिलम्ब है, तब इस बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण निम्न होगा

$$ax\sec\theta - by\,\mathrm{cosec}\theta = a^2 - b^2$$

$\therefore$ $lx + my + n = 0$ से तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा-

$$\frac{a\sec\theta}{l} = -\frac{b\,\mathrm{cosec}\theta}{m} = \frac{a^2 - b^2}{-n}$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta = -\frac{an}{l(a^2 - b^2)} \text{ तथा } \sin\theta = \frac{bm}{m(a^2 - b^2)}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करके जोड़ने पर

या $$\frac{a^2n^2}{l^2(a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2n^2}{m^2(a^2 - b^2)^2} = 1$$

या $$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$$

10. दिया है, $e_1^2 + e_2^2 = 3$

अतः $e_1 > 1$ तथा $e_2 > 1$

$\therefore$ दोनों शांकव S_1 एवं S_2 अतिपरवलय होंगे।

11. स्पर्श बिन्दु $= \left(\pm \frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$

यहाँ $a^2 = 3,\ b^2 = 3$ एवं $m = -2$

$$\therefore \quad \left(\pm\frac{3\times(-2)}{\sqrt{3\times4-3}}, \pm\frac{3}{\sqrt{3\times4-3}}\right) = \left(\pm\frac{(-6)}{3}, \pm\frac{3}{3}\right)$$

अतः अभीष्ट बिन्दु (2, – 1) या (–2, 1) होंगे।

12. दिया है समी. $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2u}{a}x + \frac{2v}{a}y + \frac{2w}{a}z + \frac{d}{a} = 0$$

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या } (r) = \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a}\right)^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 - \frac{d}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2 - da}{a^2}}$$

$$\therefore \quad \text{गोले की त्रिज्या} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2 - da}{a^2}} \geq 0$$

$$\text{या} \quad u^2 + v^2 + w^2 - da \geq 0$$

13. हम जानते है कि तीनों अक्षों से होकर जाने वाली शंकु का समीकरण निम्न है

$$fyz + gzx + hxy = 0 \quad \ldots(i)$$

यह शंकु $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ व $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ से होकर जाता है।

$$\therefore \quad -6x + 3g - 2h = 0 \quad \ldots(ii)$$

$$\text{तथा} \quad -f + 3g - 3h = 0 \quad \ldots(iii)$$

समी. (ii) व (iii) से

$$\frac{f}{-3} = \frac{g}{16} = \frac{h}{-15}$$

अतः समी. (i) से

$$-3yz + 16zx - 15xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3yz - 16zx + 15xy = 0$$

14. माना समान शांकव केन्द्र को निरूपित करने वाली समीकरण निम्न है।

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots(i)$$

$$\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta \quad \ldots(ii)$$

माना $P(r_1, \theta_1)$ शांकव (i) पर कोई बिन्दु है ताकि

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots(iii)$$

P के निर्देशांकों को $(-r_1, \theta_1 + \pi)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। ये निर्देशांक समी. (ii) को सन्तुष्ट करेगी यदि

$$\frac{l}{-r_1} = -1 + e\cos(\theta_1 + \pi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-l}{r_1} = -1 - e\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{l}{r_1} = 1 + e\cos\theta_1$$

जोकि सम्बन्ध समी. (iii) से सत्य है। इस प्रकार समी. (i) का प्रत्येक बिन्दु (ii) पर स्थित है। अतः समी. (i) व (ii) समान शांकव को निरूपित करेगी।

15. गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$, के केन्द्र बिन्दु के निर्देशांक (1, 2, – 1) हैं तब,

∴ बिन्दु (1, 2, – 1) से समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$ पर डाले गए लम्ब का समीकरण इस प्रकार

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1} = \lambda$$

बिन्दु $(x, y, z) \equiv (2\lambda + 1, -2\lambda + 2, \lambda - 1)$ को समतल के समीकरण में रखने पर,

$$2(2\lambda + 1) - 2(-2\lambda + 2) + \lambda - 1 + 12 = 0$$

$$\text{या} \quad 9\lambda + 9 = 0$$

$$\text{या} \quad \lambda = -1$$

अतः स्पर्श बिन्दु (–1, 4, – 2) प्राप्त होता है।

17. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\infty}}}$

$$\text{तब} \quad y = \sqrt{x + y}$$

$$\text{या} \quad y^2 = x + y$$

$$\text{या} \quad 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\text{या} \quad (2y-1)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\text{तब} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2y-1)}$$

18. $f(x) = \begin{vmatrix} x^n & \sin x & \cos x \\ n! & \sin\frac{n\pi}{2} & \cos\frac{n\pi}{2} \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) = \begin{vmatrix} n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$$

$n = 3$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{d^3}{dx^3}(f(x)) = \begin{vmatrix} 6 & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ 6 & \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$$

$x = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \left\{\frac{d^3}{dx^2}(f(x))\right\}_{x=0} = \begin{vmatrix} 6\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} \\ 6\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} \\ p \quad p^2 \quad p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix} = 0$$

अतः $x = 0$ पर, $\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ का मान p से स्वतन्त्र है।

19. हमें ज्ञात है कि अभिलम्ब की प्रवणता = 0

$$\therefore \quad \frac{-dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0$$

20. समी. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ से

प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 9$

पुनः $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore$ वक्र का महत्तम ढाल $= -3(1)^2 + 6(1) + 9$

$= -3 + 6 + 9$

$= 12$

22. $I = \int e^x \left\{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right\} dx$

$= \int e^x \left\{\frac{1}{2\cos^2(x/2)} + \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)}\right\} dx$

$= \int e^x \left\{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right\} dx$

$\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx, \quad$ जहाँ $f(x) = \tan\frac{x}{2}$

$= e^x f(x) + c = e^x \tan(x/2) + c$

23. $I = \int \frac{1}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)} dx$

$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 4}\right) dx$

$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} - 1} - \frac{1}{\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} + 4}\right) dx$

$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1+\tan^2 x/2}{2\tan x/2 - 1 - \tan^2 x/2} - \frac{1+\tan^2 x/2}{4 + 4\tan^2 x/2 + 2\tan x/2}\right) dx$

$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{\sec^2 x/2}{-(\tan x/2 - 1)^2}\right) dx$

$- \frac{1}{5}\int \frac{\sec^2 x/2}{4 + 4\tan^2 x/2 + 2\tan x/2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$

माना $I_1 = \frac{-1}{5}\int \frac{\sec^2 x/2 - 1}{(\tan x/2 - 1)^2} dx$

पुनः माना $\tan x/2 - 1 = t$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x/2 . \frac{1}{2} dx = dt$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x/2 \, dx = 2dt$

$\therefore \quad I_1 = \frac{-2}{5}\int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{5}.\frac{1}{t} + c_1$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(\tan x/2 - 1)} + c_1$

तथा $\quad I_2 = \frac{-1}{5}\int \frac{\sec^2 x/2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(2\tan x/2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$

माना $\quad 2\tan x/2 + \frac{1}{2} = t_1$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x/2 \, \frac{dx}{2} = dt_1$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x/2 \, dx = dt_1$

$\therefore \quad I_2 = \frac{-1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + t_1^2} dt_1$

$= \frac{-1}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} \tan^{-1}\left(\frac{t_1}{\sqrt{15}/2}\right) + c_2$

$= \frac{-2}{5\sqrt{15}} \tan^{-1}\left(\frac{4\tan x/2 + 1}{\sqrt{15}}\right) + c_2$

तब $I = I_1 + I_2$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(\tan x/2 - 1)} - \frac{2}{5\sqrt{15}} \tan^{-1}\left(\frac{4\tan x/2 + 1}{\sqrt{15}}\right) + c$

परन्तु $I = \frac{A}{\tan x/2 - 1} + B\tan^{-1}(f(x)) + c$

अतः $A = \frac{2}{5}, B = -\frac{2}{5\sqrt{15}}$ तथा $f(x) = \frac{4\tan x/2 + 1}{\sqrt{15}}$

24. $I = \int |x| dx$, जहाँ $x < 0$

$\therefore \quad I = \int -x dx$

$= -\int x dx$

$I = -\frac{x^2}{2} + c$

25. $\int_0^{1.5} [x^2] dx = \int_0^1 [x^2] dx + \int_1^{\sqrt{2}} [x^2] dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} [x^2] dx$

$\Rightarrow \quad \int_0^{1.5} [x^2] dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 \cdot dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2 dx$

$\Rightarrow \quad \int_0^{1.5} [x^2] dx = 0 + (\sqrt{2} - 1) + 2(1.5 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$

26. $[f(x)+f(-x)]$ एक सम फलन है तथा $[g(x)-g(-x)]$ एक विषम फलन है, तब $\{f(x)+f(-x)\}\{g(x)-g(-x)\}$ एक विषम फलन होगा।

$$\therefore \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[f(x)+f(-x)][g(x)-g(-x)]\,dx = 0$$

27. $\therefore a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dn$

$$\therefore a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x\,dn = \int_0^{\pi/4} \tan^n x.\tan^2 x\,dx$$

$$= a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx + \int_0^{\pi/4} \tan^n x\tan^n x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\tan^n x\,dx$$

$$= \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

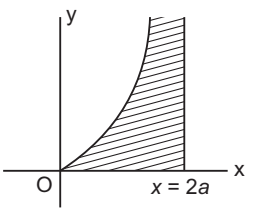
$$\therefore a_2 + a_4 = \frac{1}{2+1},\ a_3 + a_5 = \frac{1}{3+1},\ a_4 + a_6 = \frac{1}{4+1}$$

$$= \frac{1}{3} \qquad = \frac{1}{4} \qquad = \frac{1}{5}$$

अतः स्पष्ट है कि $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ धनात्मक श्रेणी में है। तब $a_2 + a_4, a_3 + a_5$ तथा $a_4 + a_6$ धनात्मक श्रेणी में होंगे।

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{1}{n} e^{r/n} = \int_0^1 e^x dx = e-1$

29. वक्र के समीकरण $y^2(2a-x) = x^3$ से स्पष्ट है कि यह x-अक्ष के परितः सममित है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है।



अब $\frac{x^3}{2a-x} < 0$ जब $x > 2a$ या $x < 0$

अतः वक्र $x > 2a$ व $x < 0$ मे आस्तित्त्व नहीं रखता है, केवल वक्र पूर्णतः $0 < x < 2a$ में आस्तित्त्व रखता है।

$$\therefore \text{घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \int_0^{2a} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}dx = 8a^2\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{3\pi a^2}{2}$$

31. अवकल समीकरण की कोटि ज्ञात नहीं की जा सकती है; क्योंकि समीकरण सभी अवकलन गुणांकों में बहुपद नहीं है।

32. दी गई अवकल समीकरण निम्न है :

$$2x\frac{dy}{dx} - y = 3 \Rightarrow 2x\frac{dy}{dx} = y+3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y+3}dxy = \frac{dx}{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \log(y+3) = \log 2x + \log c$$

$$\Rightarrow \quad y+3 = 2xc$$

$\therefore$ उपरोक्त से स्पष्ट है कि वक्र सरल रेखा होगी।

33. $\tan y\sec^2 x dx + \tan x\sec^2 y dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy$$

समाकलन करने पर,

$$\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = -\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy$$

$$\log(\tan x) + c = -\log(\tan y) + c$$

$$\Rightarrow \quad \log(\tan x\cdot\tan y) = \log k$$

$$\therefore \quad \tan x\cdot\tan y = k$$

34. $x(1-x^2)dy + (2x^2y - y - ax^3)dx = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{fx} + \frac{(2x^2-1)}{x(1-x^2)}y = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

यह $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, प्रकार का अवकलन समीकरण है। इस समीकरण तुलना करने पर,

$$P = \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}$$

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

$\therefore$ यह एक सजातीय अवकलन समीकरण है। अतः

$$y = vx \text{ तथा } \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1+v^2}$$

$$\text{या} \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\text{या} \quad \int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int\frac{1}{x}dx$$

$$\text{या} \quad \log[v+\sqrt{1+v^2}] = \log x + \log c$$

$$\text{या} \quad v + \sqrt{1+v^2} = cx$$

$$\text{या} \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$$

36. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$

$$a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

37. $\vec{a} = \hat{j} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = 4\hat{j} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times1 - 2\times(-4) + 7\times1 = 4+8+7 = 19$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

$$\therefore \quad \text{प्रक्षेप} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}$$

38. चूंकि तीनों सदिश एकसमतलीय हैं, अतः

$$\begin{vmatrix} \lambda & +1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

या $\quad \lambda[\lambda^2 - 1] - 1[\lambda + 2] + 2[-1 - 2\lambda] = 0$

या $\quad \lambda^3 - \lambda - \lambda - 2 - 2 - 4\lambda = 0$

या $\quad -\lambda^3 - 6\lambda - 4 = 0$

या $\quad \lambda = -2$

39. $\therefore \vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण $90°$ है,

$$\therefore \quad |\vec{a}|\,|\vec{b}| = 0$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90°$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}|^2 = 1 + 1 + 0$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{2}$$

40. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot[(\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a})] = [(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})]$

माना $\alpha = \vec{a}-\vec{b}+0, \beta = 0+\vec{a}-\vec{c}$ तथा $\gamma = -\vec{a}+0+\vec{c}$

$$\therefore \quad [\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\,\vec{\gamma}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

$$= 0 \times [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$$

41. माना $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{Q} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$

तथा $\vec{R} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore$ तीनों सदिश संरेख हैं। अतः $\vec{PQ} = t\,\vec{QR}$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} = t[-(3+\lambda)\hat{i} - 6\hat{j} - 12\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1 + 3t + t\lambda)\hat{i} + (2 + 6t)\hat{j} + (4 + 12t)\hat{k} = \vec{0}$$

$\therefore \quad \vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ एकसमतलीय नहीं हैं।

$$\therefore \quad (\lambda - 1 + 3t + t\lambda) = 0, 2 + 6t = 0, 4 + 12t = 0$$

या $\quad 2 + 6t = 0$

या $\quad t = \frac{-1}{3}$

तथा $\quad \lambda - 1 + 3\times\left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3$

42. किया गया कार्य $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\cdot(3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

$$= 6 - 2 + 5 = 9 \text{ इकाई}$$

43. $\vec{F} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{P} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}, \vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{r} = \vec{OP} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1+2) - \hat{j}(-3+2) + \hat{k}(-3-1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\times\vec{F} = 3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

45. यदि $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ तब

$$\vec{r} = \vec{BA} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = -6\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$$

$\therefore$ बलयुग्म का आघूर्ण $= |\vec{M}| = \sqrt{36+25+64} = 5\sqrt{5}$

51. $\therefore$ दी गई समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

$$\{2(ab+cd)\}^2 - 4\times(a^2+b^2)(c^2+d^2) < 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\begin{Bmatrix} a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 \\ -b^2d^2 \end{Bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2b^2 + b^2c^2 - 2abcd > 0$$

$$\Rightarrow \quad (ab - bc)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad ab > bc$$

$$\Rightarrow \quad ad \neq bc$$

52. यदि $\log_{10}(x^2 - 6x + 45) = 2\log_{10}10$

तब $\quad x^2 - 6x + 45 = 100$

या $\quad x^2 - 6x - 55 = 0$

या $\quad (x-11)(x+5) = 0$

$$\Rightarrow \quad x = 11, -5$$

56. लामी की प्रमेय से

$$\frac{P}{\sin 120°} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin 150°}$$

$$\frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad P : Q : R = \sqrt{3} : 2 : 1$$

57. दो समान बलों का परिणामी $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

चूंकि $R = P$

अतः $P = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

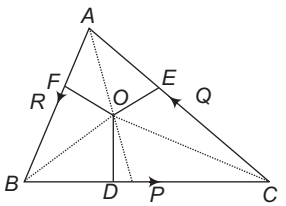
$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

या $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 60°$

या $\frac{\alpha}{2} = 60°$

$$\alpha = 120°$$

58. त्रिभुज ABC निम्न प्रकार है।



माना O, ΔABC का परिकेन्द्र है, तो $OA = OB = OC$ = त्रिज्या O से BC, CA और AB पर क्रमशः OD, DE और OF लम्ब डाले

$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC = 2A$

$$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = A$$

ΔODB में, $OD = OB\cdot\cos\angle BOD$

$= OB\cdot\cos A$

इसी प्रकार, $OE = OC\cos B$

$OF = OA\cos C$

$\because$ दिए हुए बलों का परिणामी ΔABC के परिकेन्द्र O से होकर जाता है, इसलिए O के सापेक्ष सभी बलों के आघूर्णों का बीजीय योगफल शून्य होगा।

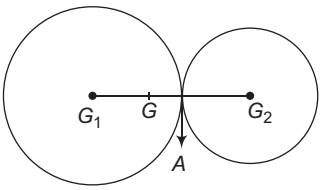
अर्थात् $P\cdot OD + Q\cdot OE + R\cdot OF = 0$

$P\cdot OB\cos A + Q\cdot OC\cos B + R\cdot OA\cos C = 0$

$\Rightarrow$ $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

59. माना आकृति का गुरुत्व केन्द्र G है, तब

$$AG = \frac{(\text{बड़े गोले का भार})\cdot AG_1 + (\text{छोटे गोले का भार})(-AG_2)}{\text{बड़े गोले का भार} + \text{छोटे गोले का भार}}$$



$$= \frac{\frac{4}{3}\pi(6)^3 w\times 6 - \frac{4}{3}\pi(3)^3 w\times 3}{288\pi w + 36\pi w}$$

$AG = 5$ सेमी

$\therefore$ $GG_1 = 6 - 5 = 1$ सेमी

60. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_2 - R_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_3 - R_2$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ $R_1 = R_2$

$= 0$

61. गति की समीकरण $h = ut_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$ से

$5 = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2$ ...(i) [$\because u = 0$]

एवं $20 = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2$ ...(ii)

$\therefore$ $\frac{5}{20} = \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2}$

अतः $\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1}{4}$ या $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 2 होगा।

63. अभीष्ट समय $= \frac{v}{g\sin\theta} = \frac{49\sqrt{2}}{9.8\times\sin 45°} = \frac{49\sqrt{2}}{9.8\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = 10$ सेकण्ड

65. $|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 - 2|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta$

$= 1 + 1 - 2\cos\theta$

$= 2[1 - \cos\theta]$

$= 2\left[1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore$ $\left|\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}\right| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

66. $(A + B)$ द्वारा एक दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{12}$

$(B + C)$ द्वारा एक दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{15}$

तथा $(C + A)$ द्वारा एक दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{20}$

$\therefore$ A द्वारा एक दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{20}-\frac{1}{15}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{5+3-4}{60}\right]$

$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{60} = \frac{1}{30}$

अतः A अकेला काम को 30 दिनों में करेगा।

67. औसत चाल $= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$

$= \frac{50+40+90}{\frac{50}{25}+\frac{40}{20}+\frac{90}{15}} = \frac{180}{10} = 18$ किमी/घण्टा

68. $2P = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{15}$ ...(i)

$8P = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t_2}$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) से

$t_2 = 15\times 3$ $[\because 2^3 = 8]$

$= 45$ वर्ष

69. $\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\frac{\log 6}{\log 5}\times\frac{\log 7}{\log 6}\times\frac{\log 8}{\log 7}\times\frac{\log 8}{\log 8}$

$= \frac{\log 9}{\log 3} = \log_3 9 = 2\log_3 3 = 2$

70. प्रश्नानुसार समीकरण $3x-4y=5$ तथा $12x-16y=20$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{-4}{-16} = \frac{5}{20}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

अतः कोई उभयनिष्ठ हल नहीं होगा।

71. माना C को मिला भाग = ₹ x

$\therefore$ B को मिला भाग = ₹ $(x+8)$

A को मिला भाग = ₹ $(x+15)$

अतः $x+(x+8)+(x+15) = 53$

या $3x = 53-23$

या $x = 10$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $A:B:C = 25:18:10$

72. $\therefore$ समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल 1 तथा 2 हैं।

$\therefore -p = 1+2$ तथा $q = 1\times 2$

$p=-3,\ q=2$

पुनः $qx^2-px+1=0$

$\alpha+\beta = \frac{p}{q} = \frac{-3}{2}$ ...(i)

तथा $\alpha\cdot\beta = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ ...(ii)

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= \frac{9}{4} - 4\times\frac{1}{2} = \frac{9}{4}-2$

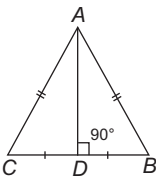
$(\alpha-\beta)^2 = \frac{1}{4}$

$\alpha-\beta = \frac{1}{2}$ ...(iii) [समी. (i) तथा (iii) से]

$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -1$

73. किसी त्रिभुज के अन्तःकोणों के अर्द्धकों का कटान बिन्दु अन्तःवृत्त का केन्द्र होता है।

74. चित्रानुसार $AB^2 = AD^2 + BD^2$



$\Rightarrow$ $AB^2 - AD^2 = BD\times BD$

$\Rightarrow$ $AB^2 - AD^2 = BD\times DC$

$[\because CD = DB]$

77. $\frac{1}{(1-x)(3-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3-x}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1}-(3-x)^{-1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1-x}{3}\right)^{-1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(1+x+x^2+\ldots)-\frac{1}{3}\right]\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\ldots\right]$

$\therefore$ x^n का गुणांक $= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}\right)$

78. माध्य $m = \frac{1+3+4+5+7+4}{6} = \frac{24}{6} = 4$

इसी प्रकार,

$m-1 = \frac{3+2+2+4+3+3+p}{7}$

$3 = \frac{17+p}{7}$

$\Rightarrow$ $p=4$

अतः नम्बर 3, 2, 2, 4, 3, 3, 4 को घटते क्रम में रखने पर,

4, 4, 3, 3, 3, 2, 2 में माध्यिका $= 3 = q$

$\therefore$ $p+q = 4+3 = 7$

79. दिया है $a^x = b^y = c^z = k$ तब

$\therefore$ $a = (k)^{1/x},\ b = (k)^{1/y},\ c = (k)^{1/z}$

$\because$ $b^2 = ac$

$\therefore$ $k^{2/y} = k^{1/x}\cdot k^{1/z}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

या $$\frac{2xz}{y} = (z + x)$$

या $$y = \frac{2xz}{z + x}$$

81. 250 व 300 के मध्य के आँकड़े = 38 – 15 = 23

84. $\sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 25$

$$\bar{X}_1 = 55, \bar{X}_2 = 60$$

$$n_1 = 30, n_2 = 20$$

तब,

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{55 \times 30 + 20 \times 60}{50} = 57$$

$$d_1 = \bar{X}_1 - \bar{X} = -2, d_2 = \bar{X}_2 - \bar{X} = 3$$

विचलन $\sigma^2 = \dfrac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{30(16 + 4) + 20(25 + 9)}{50}$$

$$\sigma^2 = 25.6$$

$\therefore$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{25.6} = 5.06$

89. माना $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

$$3A = \begin{bmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$\det(3a) = \begin{bmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= 27 (\det A)$$

90. $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{15}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+3}}$

$$= \frac{1}{4}[\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{11} - \sqrt{7} + \sqrt{15} - \sqrt{11} + ... + \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n-1}]$$

$$= \frac{1}{4}[\sqrt{4n+3} - \sqrt{3}] = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{4n+3} - \sqrt{3})(\sqrt{4n+3} + \sqrt{3})}{(\sqrt{4n+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4n + 3 - 3}{\sqrt{4n+3} + \sqrt{3}}\right] = \frac{n}{\sqrt{4n+3} + \sqrt{3}}$$

92. 5 पुरुषों के एक गोल मेज पर बैठने के प्रकार = (5 – 1)! = 4!

$\therefore$ अब 5 नए स्थानों पर 2 महिलाओं को बैठाने के कुल प्रकार = ${}^5P_2$

अत: कुल प्रकार $= 4! \times {}^5P_2 = 4! \times \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{4 \times 3! \times 5!}{3!}$

$$= 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 480$$

93. $\therefore$ $$a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{n-(n-r)}{{}^nC_{n-r}} = n\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r} - \sum_{r=0}^{n} \frac{n-r}{{}^nC_{n-r}}$$

$$= n\,a_n - \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\sum_{r=9}^{n} \frac{r}{{}^nC_r} = na_n$$

$$= \frac{na_n}{2}$$

94. $1 + \dfrac{2^3}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \dfrac{4^3}{4!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \times n^2}{nn-1!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 - 1 + 1}{n-1!}$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)n-2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)-2+2}{n-2!} + e$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)}{(n-2)n-3!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n-2!} + e$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-3!} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-2!} + e$$

$$= e + 3e + e = 5e$$

95. अभीष्ट प्राभिरता $= \dfrac{3}{7} \times \dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{4}$

98. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & \sin\theta & 1 \\ 0 & 1 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix} \qquad [\because C_1 \to C_1 + C_3]$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta = 2(1 + \sin^2\theta)$$

अत: $0 \le \sin^2\theta \le 1$

$$2 \le 2(1 + \sin^2\theta) \le 4$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta \in [2, 4]$$

101. $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$

$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A)$

$= a + b + c$

102. $u = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) \Rightarrow e^u = \dfrac{1 + \tan\theta/2}{1 - \tan\theta/2}$

$$\cos u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2e^{u}} = \frac{1+\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2} = \frac{1}{\cos x} = \sec\theta$$

103. $\sin h^{-1}(3)$

$$\Rightarrow \quad \sin h^{-1}x = \log_e (x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\therefore \quad \sin h^{-1}3 = \log_e (3 + \sqrt{9+1})$$

$$= \log_e (3 + \sqrt{10})$$

104. $\sqrt{-6}\sqrt{-6} = (-6)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = (-6)^1 = -6$

105. चूँकि $|\beta| = 1$

$$\therefore \left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\beta-\alpha}{\beta\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\beta-\alpha}{\beta(\bar{\beta}-\bar{\alpha})}\right| = \frac{1}{|\beta|}\left|\frac{\beta-\alpha}{(\bar{\beta}-\bar{\alpha})}\right| = \frac{1}{|\beta|} = 1$$

109. इकाई के nवें मूल गुणात्मक श्रेणी में होंगे जहाँ

$$r = e^{i2\pi/n} \text{ होगा।}$$

110. त्रिभुज के शीर्ष $z, z+iz$ तथा iz से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|z|^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}|z|^2 = 50$$

$$|z|^2 = 100$$

$$|z| = 10$$

111. $x^2 - y^2 - 9z^2 + 6yz = x^2 - (y^2 + 9z^2 - 6yz)$

$$= x^2 - (y-3z)^2 = (x-y+3z)(x+y-3z)$$

112. $A : B = 7 : 9$ तथा $B : C = 5 : 4$

$\therefore A : B : C = 7\times5 : 9\times5 : 4\times9 = 35 : 45 : 36$

114. $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i} = \frac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} - \frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} - \frac{i}{i^2}$

$$= \frac{10+29i-10}{29} - \frac{(12-25i-12)}{25} + i$$

$$= i + i + i = 0 + 3i$$

अतः वास्तविक भाग = 0

116. $1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} = 0$

$0 \le x \le \pi$ के लिए

$$\sin x \sin^2\frac{x}{2} \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} \ne 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} = 0 \text{ का } [0, \pi] \text{के बीच कोई हल नहीं है।}$$

पुनः $-\pi \le x < 0$ के लिए

$$-1 < \sin x \sin^2\frac{x}{2} \le 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} \ne 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin x \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

का $[-\pi, 0]$ के बीच कोई हल नहीं है।

$\therefore$ दी गई समीकरण का वर्ग-अन्तराल $[-\pi, \pi]$ के मध्य कोई हल नहीं है।

117. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$$= \cos^{-1}\left\{\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right\} + \sin^{-1}\left\{\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

118. $\frac{2\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$

$$\Rightarrow \quad 2bc\cos A + ac\cos B + 2ab\cos C = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad 2bc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ac \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + 2ab \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 + \frac{c^2+a^2-b^2}{2} + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2} = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2 + a^2 - b^2 = 2a^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

अतः त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है।

$$\therefore \quad \text{कोण } A = \frac{\pi}{2}$$

120. माना $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = k$

$\therefore a = 3k, b = 4k$ एवं $C = 7k$

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{3k+4k+7k}{7k} = \frac{14k}{7k} = 2$$

III