विषय कोड पुस्तिका कोड

क्रमांक **3946**

4 A

2014 (II)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

H

समय : 3:00 घंटे

पूर्णांक : 200 अंक

अनुदेश

1. आपने हिन्दी को माध्यम चुना है । इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में + 40 भाग 'B' + 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ) दिए गए हैं । आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं । यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी ।
2. ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक अलग से दिया गया है । अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे–फटे नहीं हैं । यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं । इसी तरह से ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक को भी जांच लें । इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं ।
3. ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें ।
4. आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृतों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है ।
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक , भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है । प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा । भाग 'C' के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है ।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं । इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है । आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या "एक से अधिक" विकल्प सही हो सकते हैं । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा । सब सही विकल्पों का चयन नहीं करने पर कोइ आंशिक क्रेडिट नहीं दिया जाएगा ।
7. नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले परीक्षार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है ।
8. परीक्षार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए ।
9. केलकूलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है ।
10. <u>परीक्षा समापित पर छिद्र बिन्दु चिन्हित स्थान से **OMR** उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल **OMR** उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बनलैस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।</u>
11. हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रमाणिक होगा ।
12. केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले परीक्षार्थी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनमति दी जाएगी ।

रोल नंबर : ....

नाम : ....

OMR उत्तर पत्रक नंबर : ....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ ।

....

इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

S/55 CSI/14–4AH—1A

भाग 'क' / PART 'A'

1. हम एक फलन की ऐसी परिभाषा करते हैं कि $f(N) = N$ की अंकों का योगफल है, जब N दशमलव संख्या में अभिव्यक्त है । उदाहरण के लिए $f(137) = 1 + 3 + 7 = 11$. तो $f(2^7 3^5 5^6)$ का मूल्यांकन करें

1. 10	2. 18
3. 28	4. 11

1. We define a function $f(N)$ = sum of digits of N, expressed as decimal number. e.g. $f(137) = 1 + 3 + 7 = 11$. Evaluate $f(2^7 3^5 5^6)$.

1. 10	2. 18
3. 28	4. 11

2. एक विशेष माल का दाम हर महीने इस क्रम में गिरता है:
   1024, 640, 400, 250, …
   माल का अगला मान क्या है?
   1. 156.25
   2. लगभग 39
   3. 64
   4. 40

2. Every month the price of a particular commodity falls in this order:
   1024, 640, 400, 250, …
   What is the next value?
   1. 156.25
   2. Approximately 39
   3. 64
   4. 40

3. लकड़ी का एक घनीय टुकड़े को, उससे एक बृहत्तम गोल बनाने किये घिसा गया । मूल आयतन का क्या अंश निकला गया?
   1. तीन-चौथाई से अधिक
   2. आधा
   3. आधे से थोड़ा कम
   4. आधे से थोड़ा अधिक

3. A cubical piece of wood was filed to make it into the largest possible sphere. What fraction of the original volume was removed?
   1. More than 3/4
   2. 1/2
   3. Slightly less than 1/2
   4. Slightly more than 1/2

4. एक हिन्दी किताब के तीन खंड जो कि आकार एवं आमाप में सर्वथासमान हैं, एक अलमारी में बायें से दायें सीधे रखे गये हैं ताकि उनके पीठ दिखें: I, II तथा III । एक कीड़ा खंड I के बाह्य, सामने के आवरण पृष्ठ से उसे खाना प्रारंभ करता है, तथा क्षैतिकत: खंड III के बाह्य पिछले आवरण-पृष्ठ तक खाता जाता है । यदि हर खंड की मोटाई 6 सें.मी. है तो, कीड़े से पारित कुल दूरी क्या है?
   1. 6 सें.मी.
   2. 12 सें.मी.
   3. 18 सें.मी.
   4. 18 सें.मी. से थोड़ा अधिक

4. Three volumes of a Hindi book, identical in shape and size, are next to each other in a shelf, all upright, so that their spines are visible, left to right: I, II and III. A worm starts eating from the outside front cover of volume I, and eats its way horizontally to the outside back cover of volume III. What is the distance travelled by the worm, if each volume is 6 cm thick?
   1. 6 cm
   2. 12 cm
   3. 18 cm
   4. a little more than 18 cm

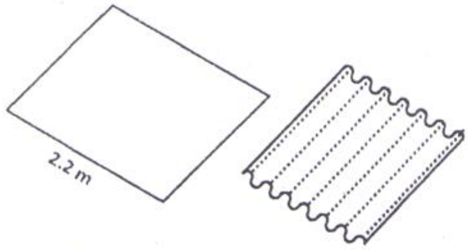
5. रेखाओं $y = 2x$, $y = -2x$ तथा $y = 6$ से परिबद्ध त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है ?

1. 36	2. 18
3. 12	4. 24

5. What is the area of the triangle bounded by the lines $y = 2x$, $y = -2x$ and $y = 6$?

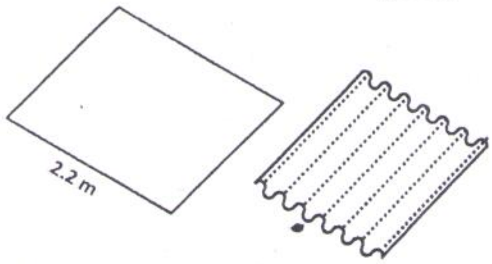
1. 36	2. 18
3. 12	4. 24

6. चित्र में दर्शाये अनुसार 2.2 मी. चौडे एक आयाताकार इस्पाती पत्तर को नालीदार किया जाता है । हर नालीदार अनुप्रस्थ काट में व्यास 7 सें.मी. का एक अर्ध वृत्त है । नालीदार करने के उपरांत इस्पाती पत्तर की चौड़ाई क्या है?



1. 1.4 m	2. 1.6 m
3. 0.7 m	4. 1.1 m

6. A 2.2 m wide rectangular steel plate is corrugated as shown in the diagram. Each corrugation is a semi-circle in cross section having a diameter of 7 cm. What will be the width of steel sheet after it is corrugated?



1. 1.4 m	2. 1.6 m
3. 0.7 m	4. 1.1 m

7. अजय, बंटी, चीनु तथा देब थे, प्रतिनिधि, नानाबाई, सम्मिश्रक तथा अभिकल्पज्ञ, परंतु उस क्रम में आवश्यकत: नहीं थे। देब ने नानाबाई को कहा कि चीनु अपने रास्ते में है । अजय अभिकल्पज्ञ के सामने तथा सम्मिश्रक के बगल में बैठा है । अभिकल्पज्ञ ने कुछ नहीं कहा । हर व्यक्ति का क्या व्यवसाय था?

1. अजय-सम्मिश्रक; बंटी-अभिकल्पज्ञ; चीनु-नानाबाई; देब-प्रतिनिधि
2. अजय-सम्मिश्रक; बंटी-नानाबाई; चीनु-प्रतिनिधि; देब- अभिकल्पज्ञ
3. अजय- नानाबाई; बंटी- प्रतिनिधि; चीनु-अभिकल्पज्ञ; देब- सम्मिश्रक
4. अजय- नानाबाई; बंटी- अभिकल्पज्ञ; चीनु-प्रतिनिधि; देब- सम्मिश्रक

7. Ajay, Bunty, Chinu and Deb were agent, baker, compounder and designer, but not necessarily in that order. Deb told the baker that Chinu is on his way. Ajay is sitting across the designer and next to the compounder. The designer didn't say anything. What is each person's occupation?

1. Ajay- compounder; Bunty-designer; Chinu- baker; Deb- agent
2. Ajay- compounder; Bunty-baker; Chinu- agent; Deb- designer
3. Ajay- baker; Bunty-agent; Chinu-designer; Deb- compounder
4. Ajay- baker; Bunty-designer; Chinu-agent; Deb- compounder

8. दो चबूतरों के बीच क्षैतिज दूरी A तथा ऊर्ध्वाधर दूरी B है । सर्वथासमान सीढियों के एक सोपान से दोनों को जोड़ना है । यदि अनुमत न्यूनतम सीढ़ी की लंबाई $\boldsymbol{a}$ तथा अनुमत उच्चतम सीढ़ी ऊँचाई $\boldsymbol{b}$ है, तो सोपान में सीढ़ियों की कुल संख्या हो सकती है:

1. $\geq B/\boldsymbol{b}$
2. $\leq A/\boldsymbol{a}$
3. $\geq B/\boldsymbol{b}$ तथा $\leq A/\boldsymbol{a}$
4. $\leq B/\boldsymbol{b}$ तथा $\geq A/\boldsymbol{a}$

8. Two platforms are separated horizontally by distance A and vertically by distance B. They are to be connected by a staircase having identical steps. If the minimum permissible step length is $\boldsymbol{a}$, and the maximum permissible step

height is b, the number of steps the staircase can have is

1. $\geq B/b$
2. $\leq A/a$
3. $\geq B/b$ and $\leq A/a$
4. $\leq B/b$ and $\geq A/a$

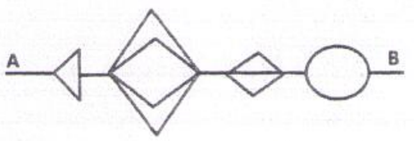
9. एक संख्या को छोड़कर, आध्य n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल 42 है । छोड़ी गयी संख्या क्या है?

1. 1 2. 2
3. 3 4. 4

9. The sum of first n natural numbers with one of them missed is 42. What is the number that was missed?

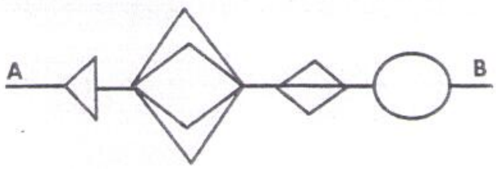
1. 1 2. 2
3. 3 4. 4

10. एक चुहिये को, बिंदु A से बिंदु B तक, बगैर पीछे चलते हुये तथा पथ के किसी अंश को पुन: पारित न करते हुये, जाना है । A से B तक जाने के लिये चुहिये की पृथक पथों की कुल संख्या क्या हो सकती है?



1. 11 2. 48
3. 72 4. 24

10. A mouse has to go from point A to B without retracing any part of the path, and never moving backwards. What is the total number of distinct paths that the mouse may take to go from A to B?



1. 11 2. 48
3. 72 4. 24

11. कोई एक दिन, जो 17 अगस्त से x दिन पहले पड़ता है, ऐसा है कि उस दिन से 50 दिन पहले, उसी वर्ष के मार्च 30 से $4x$ दिन बाद पड़ा था । x का मान क्या है?

1. 18 2. 30
3. 22 4. 16

11. A certain day, which is x days before 17th August, is such that 50 days prior to that day, it was $4x$ days since March 30th of the same year. What is x?

1. 18 2. 30
3. 22 4. 16

12. निम्न अनुक्रम में अगला पद क्या है?

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …

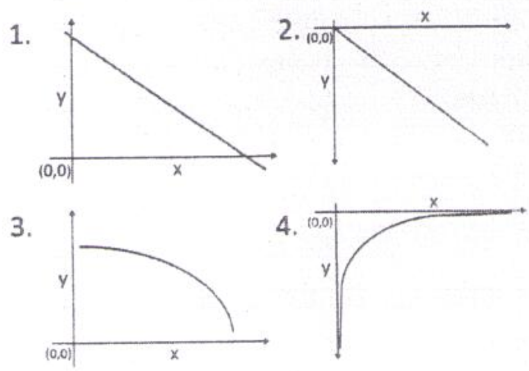
1. 37 2. 35
3. 31 4. 33

12. What is the next term in the following sequence?

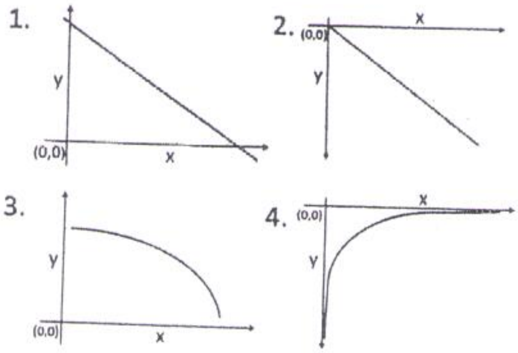
7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …

1. 37 2. 35
3. 31 4. 33

13. निम्न रेखाचित्रों में कौन-सा श्रेष्ठतम दर्शाता है कि y, x के व्युत्क्रमी अनुपात में है?



13. Which of the following figures best shows that y is inversely proportional to x?



14. एक बक्से में, जिसके आंतरिक परिमाण $24 \times 18 \times 17$ घन सें.मी. है, रखे जा सकते व्यास 6 सें.मी. के पूरे लड्डुओं की उच्चतम संख्या क्या है?

1. 24
2. 30
3. 33
4. 36

14. What is the maximum number of whole laddoos having diameter of 6 cm that can be packed in a box whose inner dimensions are $24 \times 18 \times 17$ cm^3?

1. 24
2. 30
3. 33
4. 36

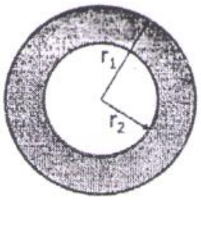
15. यदि N, E तथा T पृथक धन पूर्णांक है, ताकि $N \times E \times T = 2013$ है, तो N, E तथा T का उच्चतम संभव योगफल निम्न में से क्या है?

1. 39
2. 2015
3. 675
4. 671

15. If N, E and T are distinct positive integers such that $N \times E \times T = 2013$, then which of the following is the maximum possible sum of N, E and T ?

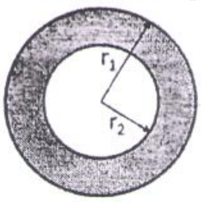
1. 39
2. 2015
3. 675
4. 671

16. चित्र के अंदर के वृत्त तथा छायित वलय दोनों के क्षेत्रफल समान हैं । त्रिज्यायें r_1 तथा r_2 इस प्रकार संबंधित है:



1. $r_1 = r_2$
2. $r_1 = r_2\sqrt{2}$
3. $r_1 = r_2\sqrt{3}$
4. $r_1 = 2r_2$

16. The areas of the inner circle and the shaded ring are equal. The radii r_1 and r_2 are related by



1. $r_1 = r_2$
2. $r_1 = r_2\sqrt{2}$
3. $r_1 = r_2\sqrt{3}$
4. $r_1 = 2r_2$

17. समीकरण $m^2 - 33n + 1 = 0$, जहां m तथा n पूर्णांक हैं, का

1. कोई हल नहीं है ।
2. ठीक-ठीक एक हल है ।
3. ठीक-ठीक दो हल हैं।
4. अनंतत: कई हल हैं।

17. The equation $m^2 - 33n + 1 = 0$, where m & n are integers, has

1. no solution
2. exactly one solution
3. exactly two solutions
4. infinitely many solutions

18. निम्न संख्याओं में से कौन-सा एक पूर्ण वर्ग है?

1. 1022121
2. 2042122
3. 3063126
4. 4083128

18. Which of the following numbers is a perfect square?

1. 1022121
2. 2042122
3. 3063126
4. 4083128

19. निम्न अनुक्रम का 94-वाँ पद क्या है?

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …

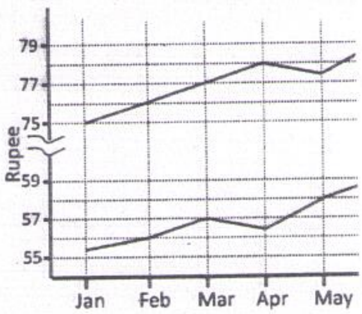
1. 8
2. 9
3. 10
4. 11

19. What is the 94[th] term of the following sequence?

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …

1. 8
2. 9
3. 10
4. 11

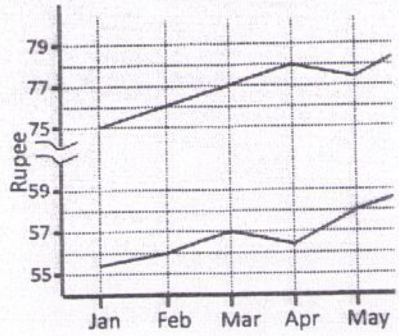
20. निम्न रेखाचित्र छः महीनों में डॉलर तथा यूरो के रूपयों में मान के विचरण को दर्शाता है:



निम्न कथनों में से कौन सा ही है?

1. जनवरी से जून तक डॉलर तथा यूरो के मान लगातार ऊर्ध्वगामी थे ।
2. जनवरी से मार्च तक डॉलर तथा यूरो के मान समान गति से बढ़े।
3. अप्रील से मई तक डॉलर के मान में उत्थान, उसी समयकाल में यूरो के गिरावट का तीन गुना था ।
4. मई तथा जून के बीच डॉलर तथा यूरो के मान में समान वृद्धि हुई ।

20. The following graphs depict variation in the value of Dollar and Euro in terms of the Rupee over six months.



Which of the following statements is true?

1. Values of Dollar and Euro rose steadily from January to June
2. Values of Dollar and Euro rose by equal rate between January to March
3. The rise in the value of Dollar from April to May is three times the fall in Euro during the same period
4. Values of Dollar and Euro rose equally between May and June

भाग 'ख' / PART 'B'

यूनिट /Unit- 1

21. मानें कि $\{b_n\}$ तथा $\{c_n\}$ वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम हैं । तो बहुपदों $f_n(x) = b_n x + c_n x^2$ के अनुक्रम के वास्तविक रेखा पर 0 तक एकसमानत: अभिसरित होने के लिए एक आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ and $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$
3. एक घन पूर्णांक N का अस्तित्व है ताकि सभी $n > N$ के लिए $b_n = 0$ तथा $c_n = 0$ है।
4. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

21. Let $\{b_n\}$ and $\{c_n\}$ be sequences of real numbers. Then a necessary and sufficient condition for the sequence of polynomials $f_n(x) = b_n x + c_n x^2$ to converge uniformly to 0 on the real line is

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ and $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$
3. There exists a positive integer N such that $b_n = 0$ and $c_n = 0$ for all $n > N$
4. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

22. मानें कि k एक धन पूर्णांक है। श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$ की अभिसरण त्रिज्या है
    1. k
    2. k^{-k}
    3. k^k
    4. ∞

22. Let k be a positive integer. The radius of convergence of the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$ is
    1. k
    2. k^{-k}
    3. k^k
    4. ∞

23. मानें कि वास्तविक गुणांकों के साथ p एक बहुपद है। तो निम्न कथनों में से कौन-सा आवश्यकत: सही है ?
    1. बहुपद p के दो वास्तविक मूलों के बीच अवकलज p' का कोई मूल नहीं है।
    2. p के कोई भी दो वास्तविक मूलों के बीच अवकलज p' का ठीक-ठीक एक मूल है।
    3. p के कोई भी दो क्रमागत मूलों के बीच अवकलज p' का ठीक-ठीक एक मूल है।
    4. p कोई भी दो क्रमागत मूलों के बीच अवकजल p' का कम से कम एक मूल है।

23. Suppose p is a polynomial with real coefficients. Then which of the following statements is necessarily true?
    1. There is no root of the derivative p' between two real roots of the polynomial p
    2. There is exactly one root of the derivative p' between any two real roots of p
    3. There is exactly one root of the derivative p' between any two consecutive roots of p
    4. There is at least one root of the derivative p' between any two consecutive roots of p

24. मानें कि $G = \{(x, f(x)) : 0 \le x \le 1\}$ किसी वास्तविक मान अवकलनीय फलन f का लेखाचित्र है । मानें कि $(1,0) \in G$ है। मानें कि किसी बिंदु पर G का स्पर्शज्या सदिश उस बिंदु पर त्रिज्या सदिश से लंब है। तो निम्न में से क्या सही है?
    1. G एक दीर्घवृत्त का चाप है।
    2. G एक वृत्त का चाप है।
    3. G एक रेखा खंड है।
    4. G एक परवलय का चाप है।

24. Let $G = \{(x, f(x)) : 0 \le x \le 1\}$ be the graph of a real valued differentiable function f. Assume that $(1,0) \in G$. Suppose that the tangent vector to G at any point is perpendicular to the radius vector at that point. Then which of the following is true?
    1. G is the arc of an ellipse
    2. G is the arc of a circle
    3. G is a line segment
    4. G is the arc of a parabola

25. मानें कि $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ एक विवृत समुच्चय है तथा $f : \Omega \to \mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन है ताकि सभी $x \in \Omega$ के लिए $(Df)(x) = 0$ है । तो निम्न में से क्या सही है?
    1. f को एक अचर फलन होना चाहिए।
    2. f को Ω के संबद्ध घटकों पर अचर होना चाहिए।
    3. $x \in \Omega$ के लिए $f(x) = 0$ या 1 होना चाहिए।
    4. फलन f का परिसर $\mathbb{Z}$ का एक उपसमुच्चय है।

25. Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : \Omega \to \mathbb{R}$ be a differentiable function such that $(Df)(x) = 0$ for all $x \in \Omega$. Then which of the following is true?
    1. f must be a constant function
    2. f must be constant on connected components of Ω

3. $f(x) = 0$ or 1 for $x \in \Omega$
4. The range of the function f is a subset of $\mathbb{Z}$

26. मानें कि $\{a_n : n \geq 1\}$ वास्तवकि संख्याओं का एक अनुक्रम है ताकि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी तथा $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ अपसारी हैं। मानें कि R घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ की अभिसरण त्रिज्या है । तो हम निष्कर्ष कर सकते हैं कि

1. $0 < R < 1$
2. $R = 1$
3. $1 < R < \infty$
4. $R = \infty$

26. Let $\{a_n : n \geq 1\}$ be a sequence of real numbers such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is divergent. Let R be the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Then we can conclude that

1. $0 < R < 1$
2. $R = 1$
3. $1 < R < \infty$
4. $R = \infty$

27. मानें कि A, B $n \times n$ आव्यूह है ताकि $BA + B^2 = I - BA^2$ जहां I $n \times n$ तत्समक आव्यूह है। निम्न में कौन-सा हमेशा सही है?

1. A व्युत्क्रमणीय है।
2. B व्युत्क्रमणीय है।
3. A+B व्युत्क्रमणीय है।
4. AB व्युत्क्रमणीय है।

27. Let A, B be $n \times n$ matrices such that $BA + B^2 = I - BA^2$ where I is the $n \times n$ identity matrix. Which of the following is always true?

1. A is nonsingular
2. B is nonsingular
3. A+B is nonsingular
4. AB is nonsingular

28. निम्न आव्यूहों में से कौन-सा आव्यूह $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ के समान पंक्ति समष्टि रखता है?

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

28. Which of the following matrices has the same row space as the matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}?$$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

29. $n \times n$ क्रमचय आव्यूह

$$\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

का सारणिक है

1. $(-1)^n$
2. $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
3. -1
4. 1

यहां $\lfloor x \rfloor$, x से अनधिक उच्चतम पूर्णांक को निर्दिष्ट करता है।

29. The determinant of the $n \times n$ permutation matrix

$$\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

1. $(-1)^n$
2. $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
3. -1
4. 1

Here $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer not exceeding x.

30. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1+x+x^2 \\ 1 & 1+y & 1+y+y^2 \\ 1 & 1+z & 1+z+z^2 \end{vmatrix}$$

इसके समान है:

1. $(z-y)(z-x)(y-x)$
2. $(x-y)(x-z)(y-z)$
3. $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$
4. $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

30. The determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1+x+x^2 \\ 1 & 1+y & 1+y+y^2 \\ 1 & 1+z & 1+z+z^2 \end{vmatrix}$$

is equal to

1. $(z-y)(z-x)(y-x)$
2. $(x-y)(x-z)(y-z)$
3. $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$
4. $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

31. निम्न आव्यूहों में से कौन-सा आव्यूह $\mathbb{R}$ पर विकर्णनीय नहीं है?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

31. Which of the following matrices is not diagonalizable over $\mathbb{R}$?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

32. मानें कि P एक 2×2 सम्मिश्र आव्यूह है, P^* उसका संयुग्मी परिवर्त है, ताकि P^*P तत्समक आव्यूह है। तो P के अभिलक्षणिक मान

1. वास्तविक हैं
2. एक दूसरे के संयुग्मी सम्मिश्र हैं
3. एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं
4. मापांक 1 हैं

32. Let P be a 2×2 complex matrix such that P^*P is the identity matrix, where P^* is the conjugate transpose of P. Then the eigenvalues of P are

1. real
2. complex conjugates of each other
3. reciprocals of each other
4. of modulus 1

यूनिट/Unit- 2

33. मानें कि $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ तथा $q(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n$ सम्मिश्र बहुपद हैं। यदि a_0, b_1 शून्येतर सम्मिश्र संख्यायें हैं तो $\frac{p(z)}{q(z)}$ का 0 पर अवशेष इस समान है:

1. $\frac{a_0}{b_1}$
2. $\frac{b_1}{a_0}$
3. $\frac{a_1}{b_1}$
4. $\frac{a_0}{a_1}$

33. Let $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ and $q(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n$ be complex polynomials. If a_0, b_1 are non-zero complex numbers then the residue of $\frac{p(z)}{q(z)}$ at 0 is equal to

1. $\frac{a_0}{b_1}$
2. $\frac{b_1}{a_0}$
3. $\frac{a_1}{b_1}$
4. $\frac{a_0}{a_1}$

34. मानें कि $\sum_0^\infty a_n z^n$ एक अभिसारी घात श्रेणी है ताकि $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R > 0$ है। मानें कि p घात d का बहुपद है । तो घात श्रेणी $\sum_{n=0}^\infty p(n) a_n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या है

1. R
2. d
3. Rd
4. R+d

34. Let $\sum_0^\infty a_n z^n$ be a convergent power series such that $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R > 0$. Let p be a polynomial of degree d. Then the radius of convergence of the power series $\sum_{n=0}^\infty p(n) a_n z^n$ equals

1. R
2. d
3. Rd
4. R+d

35. मानें कि $\mathbb{Z}_+ = \{1,2,\dots\}$ धन पूर्णांको का समुच्चय है । मानें कि

$\tau_1 := \mathbb{R}$ पर सामन्य सांस्थितिकी से प्रेरित $\mathbb{Z}_+$ पर उपसमष्टि सांस्थितिकी है ।

$\tau_2 := \mathbb{Z}_+$ पर संस्थितिकी कोटि, अर्थात् आधार $\{\{x: 1 \le x < b\}: b \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\{x: a < x < b\}: a, b \in \mathbb{Z}_+\}$ वाली सांस्थितिकी है।

$\tau_3 :=$ विविक्त सांस्थितिकी है।

तो

1. $\tau_1 \ne \tau_3$ तथा $\tau_1 = \tau_2$
2. $\tau_1 \ne \tau_2$ तथा $\tau_1 = \tau_3$
3. $\tau_1 \ne \tau_3$ तथा $\tau_2 = \tau_3$
4. $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$

35. Let $\mathbb{Z}_+ = \{1,2,\dots\}$ be the set of positive integers. Let $\tau_1 :=$ subspace topology on $\mathbb{Z}_+$ induced from the usual topology of $\mathbb{R}$, $\tau_2 :=$ order topology on $\mathbb{Z}_+$, i.e., the topology with base $\{\{x: 1 \le x < b\}: b \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\{x: a < x < b\}: a, b \in \mathbb{Z}_+\}$, $\tau_3 :=$ discrete topology.
Then

1. $\tau_1 \ne \tau_3$ and $\tau_1 = \tau_2$
2. $\tau_1 \ne \tau_2$ and $\tau_1 = \tau_3$
3. $\tau_1 \ne \tau_3$ and $\tau_2 = \tau_3$
4. $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$

36. क्रमचय समूह S_6 में संयुग्मिता वर्गों की संख्या है

1. 12
2. 11
3. 10
4. 6

36. The number of conjugacy classes in the permutation group S_6 is:

1. 12
2. 11
3. 10
4. 6

37. $\mathbb{Q}$ पर $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2})$ के क्षेत्र-विस्तार की कोटि का पता लगायें

1. 4
2. 8
3. 14
4. 32

37. Find the degree of the field extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2})$ over $\mathbb{Q}$.

1. 4
2. 8
3. 14
4. 32

38. मानें कि तीन अवयवों के अपने उपक्षेत्र के ऊपर नौ अवयवों के एक क्षेत्र का ग़ाल्वा समूह G है। तो नौ अवयवों के क्षेत्र पर G की क्रिया के लिए कक्षाओं की संख्या है

1. 3
2. 5
3. 6
4. 9

38. Let G be the Galois group of a field with nine elements over its subfield with three elements. Then the number of orbits for the action of G on the field with nine elements is

1. 3
2. 5
3. 6
4. 9

39. चार अवयवों के एक समुच्चय से तीन अवयवों के एक समुच्चय तक आच्छादी प्रतिचित्रों की संख्या है:

1. 36
2. 64
3. 69
4. 81

39. The number of surjective maps from a set of 4 elements to a set of 3 elements is

1. 36
2. 64
3. 69
4. 81

40. तीन अवयवों के एक क्षेत्र की प्रविष्टियां रखनेवाले सभी 4×4 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के समूह में, कोई भी 3-सिलो उप-समूह की गणनसांख्यिकी है:

1. 3
2. 81
3. 243
4. 729

40. In the group of all invertible 4×4 matrices with entries in the field of 3 elements, any 3-Sylow subgroup has cardinality:

1. 3
2. 81
3. 243
4. 729

यूनिट /Unit- 3

41. मानें कि $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ एक बहुपद है, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ तथा $a_2 \neq 0$ के साथ।

मानें कि $E_1 = \int_0^1 P(x)dx - \frac{1}{2}(P(0) + P(1))$

$E_2 = \int_0^1 P(x)dx - P\left(\frac{1}{2}\right)$

यदि $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ का निरपेक्ष मान है, तो

1. $|E_1| > |E_2|$
2. $|E_2| > |E_1|$
3. $|E_2| = |E_1|$
4. $|E_2| = 2|E_1|$

41. Let $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a polynomial of the form $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, with $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ and $a_2 \neq 0$.

Let $E_1 = \int_0^1 P(x)dx - \frac{1}{2}(P(0) + P(1))$

$E_2 = \int_0^1 P(x)dx - P\left(\frac{1}{2}\right)$

If $|x|$ is the absolute value of $x \in \mathbb{R}$, then

1. $|E_1| > |E_2|$
2. $|E_2| > |E_1|$
3. $|E_2| = |E_1|$
4. $|E_2| = 2|E_1|$

42. $\lambda \in \mathbb{R}$ के लिए सीमा मान समस्या

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad x \in [1,2] \\ y(1) = y(2) = 0 \end{aligned}\right\} - (P_\lambda)$$

के बारे में विचारें। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1. एक $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि किसी भी $\lambda > \lambda_0$ के लिए (P_λ) का एक अतुच्छ हल है।
2. $\{\lambda \in \mathbb{R}: (P_\lambda)$ का एक अतुच्छ हल है$\}$ $\mathbb{R}$ का एक सघन उपसमुच्चय है।
3. कुछ $x \in [1,2]$ के लिए $f(x) \neq 0$ के साथ किसी संतत फलन $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ के लिए, कुछ $\lambda \in \mathbb{R}$ के लिए (P_λ) के एक हल u का अस्तित्व है ताकि $\int_1^2 fu \neq 0$ है।
4. एक $\lambda \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि (P_λ) के दो एकघाततः स्वतंत्र हल हैं।

42. For $\lambda \in \mathbb{R}$, consider the boundary value problem

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad x \in [1,2] \\ y(1) = y(2) = 0 \end{aligned}\right\} - (P_\lambda)$$

Which of the following statement is true?

1. There exists a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ such that (P_λ) has a nontrivial solution for any $\lambda > \lambda_0$.
2. $\{\lambda \in \mathbb{R}: (P_\lambda)$ has a nontrival solution$\}$ is a dense subset of $\mathbb{R}$.
3. For any continuous function $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ with $f(x) \neq 0$ for some $x \in [1,2]$, there exists a solution u of (P_λ) for some $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\int_1^2 fu \neq 0$.
4. There exists a $\lambda \in \mathbb{R}$ such that (P_λ) has two linearly independent solutions.

43. मानें कि $y: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ दो बार संततः अवकलनीय है तथा $y(x) + \int_0^x (x-s)y(s)ds = x^3/6$ का समाधान करता है। तो

1. $y(x) = \frac{1}{6}\int_0^x s^3 sin(x-s)ds$
2. $y(x) = \frac{1}{6}\int_0^x s^3 cos(x-s)ds$
3. $y(x) = \int_0^x s\, sin(x-s)ds$
4. $y(x) = \int_0^x s\ \ cos(x-s)ds$

43. Let $y: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ be twice continuously differentiable and satisfy

$$y(x) + \int_0^x (x-s)y(s)ds = x^3/6.$$

Then

1. $y(x) = \frac{1}{6}\int_0^x s^3 sin(x-s)ds$
2. $y(x) = \frac{1}{6}\int_0^x s^3 cos(x-s)ds$
3. $y(x) = \int_0^x s\, sin(x-s)ds$
4. $y(x) = \int_0^x s\ \ cos(x-s)ds$

44. फलनक

$J(y) = y^2(1) + \int_0^1 y'^2(x)dx,$

$y(0) = 1$

जहां $y \in C^2([0,1])$है, के बारे में विचारें । यदि J को y चरमित करता है, तो

1. $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$
2. $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x$

3. $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x$
4. $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

44. Consider the functional

$J(y) = y^2(1) + \int_0^1 y'^2(x)dx,$

$y(0) = 1$

where $y \in C^2([0,1])$. If y extremizes J then

1. $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$
2. $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x$
3. $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x$
4. $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

45. मानें कि $u(x,t) = e^{i\omega x}v(t)$, $v(0) = 1$ के साथ,

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

का एक हल है। तो

1. $u(x,t) = e^{i\omega(x-\omega^2 t)}$
2. $u(x,t) = e^{i\omega x-\omega^2 t}$
3. $u(x,t) = e^{i\omega(x+\omega^2 t)}$
4. $u(x,t) = e^{i\omega^3(x-t)}$

45. Let $u(x,t) = e^{i\omega x}v(t)$ with $v(0) = 1$ be a solution to
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

Then
1. $u(x,t) = e^{i\omega(x-\omega^2 t)}$
2. $u(x,t) = e^{i\omega x-\omega^2 t}$
3. $u(x,t) = e^{i\omega(x+\omega^2 t)}$
4. $u(x,t) = e^{i\omega^3(x-t)}$

46. मानें कि $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ अवकलनीय है तथा सा.अ.स. :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f(y),\ x \in \mathbb{R} \\ &y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

का समाधान करता है, जहां $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक लिप्शिट्ज़ संतत फलन है। तो

1. $y(x) = 0$ यदि और केवल यदि $x \in \{0,1\}$
2. y परिबद्ध है।
3. y निरंतर वर्धमान है।
4. $\frac{dy}{dx}$ अपरिबद्ध है।

46. Let $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be differentiable and satisfy the ODE:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f(y),\ x \in \mathbb{R} \\ &y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

where $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Lipschitz continuous function.

Then
1. $y(x) = 0$ if and only if $x \in \{0,1\}$
2. y is bounded
3. y is strictly increasing
4. $\frac{dy}{dx}$ is unbounded

47. आं.अ.स.
$up^2 + q^2 + x + y = 0,\ p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}$
के लिए चारपिट के समीकरण इससे दिया जाता है:
1. $\frac{dx}{-1-p^3} = \frac{dy}{-1-qp^2} = \frac{du}{2p^2u+2q^2} = \frac{dp}{2pu} = \frac{dq}{2q}$
2. $\frac{dx}{2pu} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2p^2u+2q^2} = \frac{dp}{-1-p^3} = \frac{dq}{-1-qp^2}$
3. $\frac{dx}{up^2} = \frac{dy}{q^2} = \frac{du}{0} = \frac{dp}{x} = \frac{dq}{y}$
4. $\frac{dx}{2q} = \frac{dy}{2pu} = \frac{du}{x+y} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{qp^2}$

47. The Charpit's equations for the PDE

$$up^2 + q^2 + x + y = 0, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

are given by

1. $\frac{dx}{-1-p^3} = \frac{dy}{-1-qp^2} = \frac{du}{2p^2u+2q^2} = \frac{dp}{2pu} = \frac{dq}{2q}$
2. $\frac{dx}{2pu} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2p^2u+2q^2} = \frac{dp}{-1-p^3} = \frac{dq}{-1-qp^2}$
3. $\frac{dx}{up^2} = \frac{dy}{q^2} = \frac{du}{0} = \frac{dp}{x} = \frac{dq}{y}$
4. $\frac{dx}{2q} = \frac{dy}{2pu} = \frac{du}{x+y} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{qp^2}$

48. गति v के साथ विराम से गुरूत्व के अधीन मुक्ततः गिरते एकांक द्रव्यमान के एक पिंड के बारे में विचारें । यदि वात-प्रतिरोध त्वरण को cv से, जहां c एक अचर है, मंदित करता है, तो

1. $v = \frac{g}{c}[1 + e^{ct}]$
2. $v = \frac{g}{c}[1 + e^{-ct}]$
3. $v = \frac{g}{c}[1 - e^{-ct}]$
4. $v = \frac{g}{c}[1 - e^{ct}]$

48. Consider a body of unit mass falling freely from rest under gravity with velocity v. If the air resistance retards the acceleration by cv where c is a constant, then

1. $v = \frac{g}{c}[1 + e^{ct}]$
2. $v = \frac{g}{c}[1 + e^{-ct}]$
3. $v = \frac{g}{c}[1 - e^{-ct}]$
4. $v = \frac{g}{c}[1 - e^{ct}]$

यूनिट/Unit- 4

49. मानें कि सभी i के लिए, $\mathrm{E}(X_i) = 0$ तथा $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ के साथ स्वतंत्रतः तथा सर्वथासमातः बंटित यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \ldots$ हैं। मानें कि $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ है। मानें कि $\Phi(x)$ एक मानक प्रसामान्य यादृच्छिक चर का संचयी बंटन फलन है। तो किसी भी $x > 0$ के लिए $\lim_{n\to\infty} P(-nx < S_n < nx)$ इसके समान है:

1. $2\Phi(x) - 1$
2. $\Phi(x)$
3. 1
4. $1 - \Phi(2x)$

49. Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent and identically distributed random variables with $\mathrm{E}(X_i) = 0$ and $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ for all i. Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Let $\Phi(x)$ denote the cumulative distribution function of a standard normal random variable. Then, for any $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(-nx < S_n < nx)$ equals

1. $2\Phi(x) - 1$
2. $\Phi(x)$
3. 1
4. $1 - \Phi(2x)$

50. एक वृत्त में व्यवस्थित आठ संख्यायित कुर्सियों पर पाँच व्यक्ति A, B, C, D तथा E यादृच्छिकतः बिठाये जाते हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि A तथा B दोनों कम से कम दो कुर्सियों से पृथकित हैं?

1. $3/7$
2. $1/2$
3. $4/7$
4. $1/4$

50. Five persons A, B, C, D and E are seated at random on eight numbered chairs which are arranged in a circle. What is the probability that A and B are separated by at least 2 chairs?

1. $3/7$
2. $1/2$
3. $4/7$
4. $1/4$

51. मानें कि X तथा Y पूर्णांक-मान, परिबद्ध यादृच्छिक चर हैं। तो निम्न कथनों में से कौन-सा **गलत** है?

1. $E(X) = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y)$
2. $V(X) = \sum_y V(X|Y = y)P(Y = y)$
3. $P(X = x) = \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y)$
4. $E(XY) = \sum_y yE(X|Y = y)P(Y = y)$

51. Let X and Y be integer-valued, bounded random variables. Then which of the following statement is FALSE?

1. $E(X) = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y)$
2. $V(X) = \sum_y V(X|Y = y)P(Y = y)$
3. $P(X = x) = \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y)$
4. $E(XY) = \sum_y yE(X|Y = y)P(Y = y)$

52. मानें कि $X_1, X_2, \ldots$ एक आम प्रायिकता समष्टि पर यादृच्छिक चर हैं। मानें कि $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$। तो, प्रायिकता में X_n दो तक अभिसरित होता है यदि तथा मात्र यदि

1. $\mu_n \to 0$ तथा $\sigma_n^2 \to 2$
2. $\mu_n \to 2$ तथा $\sigma_n^2 \to 0$
3. $\mu_n \to 0$ तथा σ_n^2 अभिसरित होता है
4. $\sigma_n^2 \to 0$ तथा μ_n अभिसरित होता है

52. Suppose $X_1, X_2, \ldots$ are random variables on a common probability space with $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$. Then, X_n converges in probability to 2 if and only if

1. $\mu_n \to 0$ and $\sigma_n^2 \to 2$
2. $\mu_n \to 2$ and $\sigma_n^2 \to 0$
3. $\mu_n \to 0$ and σ_n^2 converges
4. $\sigma_n^2 \to 0$ and μ_n converges

53. मानें कि X_1, X_2 तथा X_3 स्वतंत्र तथा सवर्थासमानतः बंटित यादृच्छिक चर हैं, जहां हर एक का, प्राचल 1/2 का एक बर्नूली बंटन है। 2×2 आव्यूह $A = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ के बारे में विचारें। तो, $P(A$ व्युत्क्रमणीय है$)$ इसके समान है:

1. 0
2. 1
3. 1/4
4. 3/4

53. Suppose that X_1, X_2 and X_3 are independent and identically distributed random variables, each having a Bernoulli distribution with parameter 1/2. Consider the 2×2 matrix $A = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$. Then, $P(A \text{ is invertible})$ equals

1. 0
2. 1
3. 1/4
4. 3/4

54. मानें कि $X_1, X_2, \ldots X_n$ $U(0,\theta), \theta > 0$ से निकाली गई एक यादृच्छिक नमूना है। मानें कि $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ क्रम प्रतिदर्शज हैं। θ के लिए दो अनभिनत आकलकों $T_1 = 2\bar{X}$ तथा $T_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right) X_{(n)}$ के बारें में विचारें। तो

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(T_2)}{\mathrm{Var}(T_1)} =$$

1. 0
2. 1
3. ∞
4. 12

54. Suppose $X_1, X_2, \ldots X_n$ is a random sample from $U(0,\theta), \theta > 0$. Let $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ be the order statistics. Consider the two unbiased estimators for θ: $T_1 = 2\bar{X}$ and $T_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right) X_{(n)}$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(T_2)}{\mathrm{Var}(T_1)} =$$

1. 0
2. 1
3. ∞
4. 12

55. मानें कि $X \sim$ प्वासों $(\lambda), \lambda > 0$ । मानें कि λ का पूर्व बंटन $U(0,1)$ है। यदि $X = 0$ प्रेक्षित किया जाता है, तो समुच्चय $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ की उत्तर प्रायिकता है

1. 0.5
2. 1
3. $\frac{e-\sqrt{e}}{e-1}$
4. $\frac{1}{e}$

55. Suppose $X \sim$ Poisson $(\lambda), \lambda > 0$. Let the prior distribution of λ be $U(0,1)$. If $X = 0$ is observed, then the posterior probability of the set $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ is

1. 0.5
2. 1
3. $\frac{e-\sqrt{e}}{e-1}$
4. $\frac{1}{e}$

56. मानें कि $X \sim N(0,1)$ तथा $X = x$ दिये जाने पर Y का प्रतिबंधित बंटन $N(\alpha x, 1)$है, $0 < \alpha < 1$ के लिए। जब हम Y को X पर समाश्रयित करते हैं, निर्धारण गुणांक R^2 है

1. α^2
2. α
3. $\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
4. $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$

56. Suppose $X \sim N(0,1)$ and the conditional distribution of Y given $X = x$ is $N(\alpha x, 1)$, for $0 < \alpha < 1$. When we regress Y on X, the coefficient of determination R^2 is

1. α^2 2. α
3. $\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ 4. $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$

57. मानें कि माध्य μ एवं धनात्मक सहप्रसरण आव्यूह Σ युक्त एक p-विचर प्रसामान्य बंटन से निकाली गयी आमाप n की यादृच्छिक नमूना $X_1, \ldots, X_n$ है। सही कथन को चुनें:
   1. $(X_1 - \mu)'\Sigma^{-1}(X_1 - \mu)$ का 1 स्वतंत्रता कोटि का काई वर्ग बंटन है।
   2. $\bar{X}\bar{X}'$ का p स्वतंत्रता कोटियों का विशार्ट बंटन है।
   3. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(X_i - \mu)'$ का n स्वतंत्रता कोटियों का विशार्ट बंटन है।
   4. $X_1 + X_2$ तथा $X_1 - X_2$ स्वतंत्रत: बंटित हैं।

57. Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a p-variate Normal distribution with mean μ and positive definite covariance matrix Σ. Choose the correct statement
   1. $(X_1 - \mu)'\Sigma^{-1}(X_1 - \mu)$ has chi-square distribution with 1 d.f.
   2. $\bar{X}\bar{X}'$ has Wishart distribution with p d.f.
   3. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(X_i - \mu)'$ has Wishart distribution with n d.f.
   4. $X_1 + X_2$ and $X_1 - X_2$ are independently distributed.

58. n इकाइयों वाली समष्टि $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ से आमाप n के कितने भिन्न नमूने, पुनःस्थापन के साथ, निकाले जा सकते हैं?

1. n^n 2. $\binom{2n-1}{n}$
3. $\binom{2n-1}{n+1}$ 4. 1

58. How many distinct samples of size n can be drawn with replacement from the population $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ of n units?

1. n^n 2. $\binom{2n-1}{n}$
3. $\binom{2n-1}{n+1}$ 4. 1

59. चार शिक्षण प्रविधियों की प्रभाविता की परीक्षण में एक कॉलेज के पाँच शिक्षक सम्मिलित थे। 120 छात्रों की एक कक्षा यादृच्छिकत: हर एक 24 के पाँच समूहों में विभाजित किया गया: पाँच शिक्षकों में से हर एक को एक समूह सौंपा गया। हर शिक्षक ने अपने समूह को यादृच्छिकत: आगे चार समान उपसमूहों में विभाजित किया तथा हर उपसमूह के लिए एक शिक्षण प्रविधि को अपनाया। सभी शिक्षकों ने एक ही पाठ्यक्रम विषय का उपयोग किया। जब सभी कक्षाओं की पूर्ति हुई, एक आम परीक्षा संचालित की गयी तथा अंक अंकित किये गये। मानें कि हमें यह परीक्षण करना है कि क्या सभी शिक्षण विधि समानत: प्रभावी हैं।
अवशिष्ट वर्गों के योगफल से संगत स्वतंत्रता कोटि क्या है?

1. 60 2. 100
3. 119 4. 460

59. For testing the effectiveness of four teaching techniques, five teachers of a college were involved. A class of 120 students was divided into 5 groups of 24 each at random; one group was assigned to each of the five teachers. Each teacher further divided his/her group into four equal subgroups at random, and used one technique per subgroup. All of them used the same course material. After all the classes were over, a common examination was conducted and the marks were noted. Suppose we want to test whether all the four teaching techniques are equally effective. What is the degrees of freedom associated with the residual sum of squares?

1. 60 2. 100
3. 119 4. 460

60. इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या विचार करें:
$z = -2x - 5y$ को प्रतिबंधों

$3x + 4y \geq 5, x \geq 0, y \geq 0$

के अधीन न्यूनित करें। निम्न में से क्या सही है?

1. सुसंगत हलों का समुच्चय रिक्त है।
2. सुसंगत हलों का समुच्चय अरिक्त है, परंतु कोई इष्टतम हल नहीं है।
3. इष्टतम मान $\left(0,\frac{5}{4}\right)$पर पाया जाता है।
4. इष्टतम मान $\left(\frac{5}{3},0\right)$ पर पाया जाता है।

60. Consider the linear programming problem:
Minimize: $z = -2x - 5y$
subject to $3x + 4y \geq 5, x \geq 0, y \geq 0$.
which of the following is correct?

1. Set of feasible solutions is empty.
2. Set of feasible solutions is non-empty but there is no optimal solution.
3. Optimal value is attained at $\left(0,\frac{5}{4}\right)$.
4. Optimal value is attained at $\left(\frac{5}{3},0\right)$.

भाग 'ग' / PART 'C'

यूनिट /Unit- 1

61. मानें कि E, $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय है। तो अभिलक्षणिक फलन $\chi_E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ संतत है यदि एवं मात्र यदि

1. E संवृत है।
2. E विवृत है।
3. E संवृत तथा विवृत दोनों है।
4. E न तो संवृत है न तो विवृत है।

61. Let E be a subset of $\mathbb{R}$. Then the characteristic function $\chi_E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous if and only if

1. E is closed
2. E is open
3. E is both open and closed
4. E is neither open nor closed

62. मानें कि P एक एकगुणांकी बहुपद है, घात n का, एक चर में, वास्तविक गुणांकों के साथ तथा K एक वास्तविक संख्या है। तो निम्न कथनों में से कौन-सा/से आवश्यकत: सही है/हैं?

1. यदि n सम है तथा $K > 0$, तो ऐसे $x_0 \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि $P(x_0) = K\, e^{x_0}$ है।
2. यदि n विषम है तथा $K < 0$, तो ऐसे $x_0 \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि $P(x_0) = K\, e^{x_0}$ है।
3. किसी धन पूर्णांक n तथा $0 < K < 1$ के लिए ऐसे $x_0 \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि $P(x_0) = K\, e^{x_0}$ है।
4. यदि n विषम है तथा $K \in \mathbb{R}$, तो ऐसे $x_0 \in \mathbb{R}$ का अस्तित्व है ताकि $P(x_0) = K\, e^{x_0}$ है।

62. Suppose that P is a monic polynomial of degree n in one variable with real coefficients and K is a real number. Then which of the following statements is/are necessarily true?

1. If n is even and $K > 0$, then there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $P(x_0) = K\, e^{x_0}$
2. If n is odd and $K < 0$, then there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $P(x_0) = K\, e^{x_0}$
3. For any natural number n and $0 < K < 1$, there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $P(x_0) = K\, e^{x_0}$
4. If n is odd and $K \in \mathbb{R}$, then there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $P(x_0) = K\, e^{x_0}$

63. मानें कि $\{a_k\}$ धन वास्तविक संख्याओं का एक अपरिबद्ध निरंतर वर्धमान अनुक्रम है तथा $x_k = (a_{k+1} - a_k)/a_{k+1}$ है। निम्न कथनों में से कौन-सा/से सही है/हैं?

1. सभी $n \geq m$ के लिए, $\sum_{k=m}^{n} x_k > 1 - \frac{a_m}{a_n}$ है।
2. ऐसे $n \geq m$ का अस्तित्व है ताकि $\sum_{k=m}^{n} x_k > \frac{1}{2}$ है।
3. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ एक परिमित सीमांत पर अभिसरित है।
4. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, ∞ तक अपसरित है।

63. Let $\{a_k\}$ be an unbounded, strictly increasing sequence of positive real numbers and $x_k = (a_{k+1} - a_k)/a_{k+1}$. Which of the following statements is/are correct?

1. For all $n \geq m$, $\sum_{k=m}^{n} x_k > 1 - \frac{a_m}{a_n}$
2. There exists $n \geq m$ such that $\sum_{k=m}^{n} x_k > \frac{1}{2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converges to a finite limit.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ diverges to ∞

64. एक अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए तथा एक संबद्ध दूरीक समष्टि (X, d) में एक बिंदु x के लिए, मानें कि $d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$ है। निम्न कथनों में से कौन-सा/से सही है/हैं?

1. यदि S संवृत है तथा $d(x, S) > 0$, तो x, S का एक पुंज बिन्दु नहीं है।
2. यदि S विवृत है तथा $d(x, S) > 0$ तो x, S का एक पुंज बिन्दु नहीं है।
3. यदि S संवृत है तथा $d(x, S) > 0$ तो S, x को अंतर्विष्ट नहीं करता।
4. यदि S विवृत है तथा $d(x, S) = 0$ तो $x \in S$ है।

64. For a non-empty subset S and a point x in a connected metric space (X, d), let $d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$. Which of the following statements is/are correct?

1. If S is closed and $d(x, S) > 0$ then x is not an accumulation point of S
2. If S is open and $d(x, S) > 0$ then x is not an accumulation point of S
3. If S is closed and $d(x, S) > 0$ then S does not contain x
4. If S is open and $d(x, S) = 0$ then $x \in S$

65. मानें कि f, $\mathbb{R}$ पर एक संतत: अवकलनीय फलन है। मानें कि

$$L = \lim_{x \to \infty} (f(x) + f'(x))$$

का अस्तित्व है। यदि $0 < L < \infty$ है, तो निम्न कथनों में से कौन-सा/से सही है/हैं?

1. यदि $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ का अस्तित्व है, तो वह 0 है।
2. यदि $\lim_{x \to \infty} f(x)$ का अस्तित्व है, तो वह L है।
3. यदि $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ का अस्तितव है, तो $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ है।
4. यदि $\lim_{x \to \infty} f(x)$ का अस्तित्व है, तो $\lim_{x \to \infty} f'(x) = L$ है।

65. Let f be a continuously differentiable function on $\mathbb{R}$. Suppose that

$$L = \lim_{x \to \infty} (f(x) + f'(x))$$

exists. If $0 < L < \infty$, then which of the following statements is/are correct?

1. If $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ exists, then it is 0
2. If $\lim_{x \to \infty} f(x)$ exists then it is L
3. If $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ exists then $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$
4. If $\lim_{x \to \infty} f(x)$ exists then $\lim_{x \to \infty} f'(x) = L$

66. मानें कि A, $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय है। निम्न गुणधर्मों में से कौन-सा इंगित करता है कि A संहत है?

1. A से $\mathbb{R}$ तक का हर संतत फलन परिबद्ध है।
2. A के हर अनुक्रम $\{x_n\}$ का एक अभिसारी उपानुक्रम है, जो A में एक बिंदु पर अभिसरित है।
3. A से $[0,1]$ पर आच्छादक एक संतत फलन का अस्तित्व है।
4. A से $(0,1)$ पर आच्छादक कोई संतत तथा ऐकैकी फलन नहीं है।

66. Let A be a subset of $\mathbb{R}$. Which of the following properties imply that A is compact?

1. Every continuous function f from A to $\mathbb{R}$ is bounded
2. Every sequence $\{x_n\}$ in A has a convergent subsequence converging to a point in A
3. There exists a continuous function from A onto $[0,1]$
4. There is no one-one and continuous function from A onto $(0,1)$

67. मानें कि f [0,1] से [0,1] के अंदर एक एकदिष्ट वर्धमान फलन है। निम्न कथनों में से कौन-सा/से सही है/हैं?

1. [0,1]में परिमिततः कई बिंदुओं के अलावा सभी जगह f को संतत होना चाहिये।
2. [0,1]में गणनीयतः कई बिंदुओं के अलावा सभी जगह f को संतत होना चाहिये।
3. f को रीमान समाकलनीय होना चाहिए।
4. f को लेबेग समाकलनीय होना चाहिये।

67. Let f be a monotonically increasing function from [0,1] into [0,1]. Which of the following statements is/are true?

1. f must be continuous at all but finitely many points in [0,1]
2. f must be continuous at all but countably many points in [0,1]
3. f must be Riemann integrable
4. f must be Lebesgue integrable

68. मानकित रैखिक समष्टियों $X_1 = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ तथा $X_\infty = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, जहां $C[0,1]$ पर सभी संतत वास्तविक मान फलनों की सदिश समष्टि को निर्दिष्ट करता है, तथा $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ एवं $\| f \|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$ हैं, पर विचारें। मानें कि X_1 तथा X_∞ में विवृत एकक गोलक क्रमशः U_1 तथा U_∞ हैं। तो

1. U_1का एक उपसमुच्चय U_∞ है।
2. U_∞ का एक उपसमुच्चय U_1 है।
3. U_∞, U_1 के समान है।
4. न तो U_1का उपसमुच्चय U_∞ है, न तो U_∞का एक उपसमुच्चय U_1 है।

68. Consider the normed linear spaces $X_1 = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ and $X_\infty = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, where $C[0,1]$ denotes the vector space of all continuous real valued functions on [0,1] and $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, $\| f \|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Let U_1 and U_∞ be the open unit balls in X_1 and X_∞ respectively. Then

1. U_∞ is a subset of U_1
2. U_1 is a subset of U_∞
3. U_∞ is equal to U_1
4. Neither U_∞ is a subset of U_1 nor U_1 is a subset of U_∞

69. मानें कि X एक मानक समष्टि है तथा मानें कि $f: X \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है। मानें कि $G = \{(x, f(x): x \in X\}$ f का लेखाचित्र है। तो

1. G, X का समरूपी है।
2. G, $\mathbb{R}$ का समरूपी है।
3. G, $X \times \mathbb{R}$ का समरूपी है।
4. G, $\mathbb{R} \times X$ का समरूपी है।

69. Let X be a metric space and $f: X \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Let $G = \{(x, f(x): x \in X\}$ be the graph of f. Then

1. G is homeomorphic to X
2. G is homeomorphic to $\mathbb{R}$
3. G is homeomorphic to $X \times \mathbb{R}$
4. G is homeomorphic to $\mathbb{R} \times X$

70. मानें कि A एक वास्तविक $n \times n$ लांबिक आव्यूह है, अर्थात् $A^tA = AA^t = I_n$, $n \times n$ तत्समक आव्यूह। निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकतः सही हैं?

1. $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. A के सभी अभिलक्षणिक मान $+1$ या -1 हैं।
3. A की पंक्तियां $\mathbb{R}^n$ का एक प्रसामान्य लांबिक आधार रचाते हैं।
4. $\mathbb{R}$ पर A विकर्णनीय है।

70. Let A be a real $n \times n$ orthogonal matrix, that is, $A^tA = AA^t = I_n$, the $n \times n$ identity matrix. Which of the following statements are necessarily true?

1. $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. All eigenvalues of A are either $+1$ or -1
3. The rows of A form an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$
4. A is diagonalizable over $\mathbb{R}$

71. निम्न आव्यूहों में से कौन-से, जोरदां विहित रूप $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ के समान रखते हैं?

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

71. Which of the following matrices have Jordan canonical form equal to

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

72. मानें कि A एक 3×4 तथा b एक 3×1 आव्यूह है, जिसके सभी प्रविष्टियां पूर्णांक है। मानें कि तंत्र $Ax = b$ का एक सम्मिश्रित हल है। तो

1. $Ax = b$ का एक पूर्णांक हल है।
2. $Ax = b$ का एक परिमेय हल है।
3. $Ax = 0$ के वास्तविक हलों के समुच्चय का एक आधार परिमेय हलों से अंतर्विष्ट है।
4. यदि $b \neq 0$, तो A की जाति धन है।

72. Let A be a 3×4 and b be a 3×1 matrix with integer entries. Suppose that the system $Ax = b$ has a complex solution. Then

1. $Ax = b$ has an integer solution.
2. $Ax = b$ has a rational solution.
3. The set of real solutions to $Ax = 0$ has a basis consisting of rational solutions.
4. If $b \neq 0$ then A has positive rank.

73. मानें कि f, $\mathbb{R}^3$ पर एक शून्येतर सममित द्विरैखिक रूप है। मानें कि रैखिक रूपांतरणों $T_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, i = 1,2$ का अस्तित्व है ताकि सभी $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ के लिए, $f(\alpha, \beta) = T_1(\alpha)T_2(\beta)$ तो

1. rank $f = 1$
2. $\dim \{\beta \in \mathbb{R}^3$: सभी $\alpha \in \mathbb{R}^3$ के लिए $f(\alpha, \beta) = 0\} = 2$ है।
3. f धन सामिनिश्चित या ऋण सामिनिश्चित है।
4. $\{\alpha: f(\alpha, \alpha) = 0\}$ घात 2 का एक रैखिक उपसमुच्चय है।

73. Let f be a non-zero symmetric bilinear form on $\mathbb{R}^3$. Suppose that there exist linear transformations $T_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, i = 1,2$ such that for all $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, $f(\alpha, \beta) = T_1(\alpha)T_2(\beta)$. Then:

1. rank $f = 1$
2. $\dim \{\beta \in \mathbb{R}^3: f(\alpha, \beta) = 0$ for all $\alpha \in \mathbb{R}^3\} = 2$
3. f is a positive semi-definite or negative semi-definite
4. $\{\alpha: f(\alpha, \alpha) = 0\}$ is a linear subspace of dimension 2

74. आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ समाधान करता है:

1. A व्युत्क्रमणीय है तथा व्युत्क्रम की सभी प्रविष्टियाँ पूर्णांक हैं।
2. det (A) विषम है।
3. det (A) 13 से विभाजनीय है।
4. det (A) के कम-से-कम दो अभाज्य भाजक हैं।

74. The matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ satisfies:

1. A is invertible and the inverse has all integer entries.
2. det (A) is odd.
3. det (A) is divisible by 13.
4. det (A) has at least two prime divisors.

75. मानें कि A एक 5×5 आव्यूह हैं तथा आव्यूह A की एक प्रविष्टि बदलकर आव्यूह B को पाया जाता है। मानें कि A तथा B की जाति क्रमशः r तथा s है। निम्न कथनों में से कौन सा/से सही है/हैं?

1. $s \leq r + 1$
2. $r - 1 \leq s$
3. $s = r - 1$
4. $s \neq r$

75. Let A be 5×5 matrix and let B be obtained by changing one element of A. Let r and s be the ranks of A and B respectively. Which of the following statements is/are correct?
1. $s \le r+1$
2. $r-1 \le s$
3. $s = r-1$
4. $s \ne r$

76. मानें कि $M_n(K)$ क्षेत्र K से प्रविष्टियों से युक्त सभी $n \times n$ आव्यूहों की समष्टि को निर्दिष्ट करता है। एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह $A = (A_{ij}) \in M_n(K)$, को स्थित करें, तथा रैखिक मानचित्र $T: M_n(K) \to M_n(K)$ जो $T(X) = AX$ से दिया जाता है, पर विचारें। तो
1. trace $(T) = n\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$
2. trace $(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$
3. T की जाति n^2 है।
4. T व्युत्क्रमणीय है।

76. Let $M_n(K)$ denote the space of all $n \times n$ matrices with entries in a field K. Fix a non-singular matrix $A = (A_{ij}) \in M_n(K)$, and consider the linear map $T: M_n(K) \to M_n(K)$ given by :
$$T(X) = AX.$$
Then:
1. trace $(T) = n\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$
2. trace $(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$
3. rank of T is n^2
4. T is non-singular

77. एक परिमित विमीय सदिश समष्टि के स्वेच्छ उपसमष्टियों U, V तथा W के लिए निम्न में से कौन सा लागू है?
1. $U \cap (V+W) \subset U \cap V + U \cap W$
2. $U \cap (V+W) \supset U \cap V + U \cap W$
3. $(U \cap V) + W \subset (U+W) \cap (V+W)$
4. $(U \cap V) + W \supset (U+W) \cap (V+W)$

77. For arbitrary subspaces U, V and W of a finite dimensional vector space, which of the following hold:
1. $U \cap (V+W) \subset U \cap V + U \cap W$
2. $U \cap (V+W) \supset U \cap V + U \cap W$
3. $(U \cap V) + W \subset (U+W) \cap (V+W)$
4. $(U \cap V) + W \supset (U+W) \cap (V+W)$

78. मानें कि A एक 4×7 वास्तविक आव्यूह है तथा B एक 7×4 वास्तविक आव्यूह है ताकि $AB = I_4$ जहां I_4, 4×4 तत्समक आव्यूह है। निम्न में से कौन-सा/से हमेशा सही है/हैं?
1. rank $(A) = 4$
2. rank $(B) = 7$
3. शून्यता $(B) = 0$
4. $BA = I_7$ जहां I_7, 7×7 तत्समक आव्यूह है।

78. Let A be a 4×7 real matrix and B be a 7×4 real matrix such that $AB = I_4$, where I_4 is the 4×4 identity matrix. Which of the following is/are always true?
1. rank $(A) = 4$
2. rank $(B) = 7$
3. nullity $(B) = 0$
4. $BA = I_7$, where I_7 is the 7×7 identity matrix

यूनिट/Unit - 2

79. मानें कि $\mathbb{C}$ पर f एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है तथा मानें कि $\mathbb{C}$ का एक विवृत तथा परिबद्ध उपसमुच्चय Ω है। मानें कि
$S = \{Re\, f(z) + Im\, f(z) \mid z \in \Omega\}$.
निम्न कथनों में से कौन-सा/से आवश्यकत: सही है/हैं?
1. $\mathbb{R}$ में S एक विवृत समुच्चय है।
2. $\mathbb{R}$ में S एक संवृत समुच्चय है।
3. $\mathbb{C}$ का एक विवृत समुच्चय S है।
4. $\mathbb{R}$ में S एक वियुक्त समुचचय है।

79. Let f be an entire function on $\mathbb{C}$ and let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{C}$.
Let $S = \{Re\, f(z) + Im\, f(z) \mid z \in \Omega\}$.
Which of the following statements is/are necessarily correct?
1. S is an open set in $\mathbb{R}$
2. S is a closed set in $\mathbb{R}$
3. S is an open set of $\mathbb{C}$
4. S is a discrete set in $\mathbb{R}$

80. मानें कि $u(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + 2x$. निम्न फलनों v में किसके लिए, $\mathbb{C}$ पर $u + iv$ एक होलोमर्फिक फलन है?

1. $v(x+iy) = y^3 - 3x^2y + 2y$
2. $v(x+iy) = 3x^2y - y^3 + 2y$
3. $v(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + 2x$
4. $v(x+iy) = 0$

80. Let $u(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + 2x$. For which of the following functions v, is $u + iv$ a holomorphic function on $\mathbb{C}$?

1. $v(x+iy) = y^3 - 3x^2y + 2y$
2. $v(x+iy) = 3x^2y - y^3 + 2y$
3. $v(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + 2x$
4. $v(x+iy) = 0$

81. मानें कि $\mathbb{C}$ पर f एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। मानें कि $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ है। निम्न कथनों में से कौन-सा/से सही है/हैं?

1. यदि सभी $z \in \mathbb{R}$ के लिए $f(z) \in \mathbb{R}$ है तो $f = g$ है।
2. यदि सभी $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$ तथा किसी $a > 0$ के लिए $f(z) \in \mathbb{R}$ है तो सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z + ia) = f(z - ia)$ है।
3. यदि सभी $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$ तथा किसी $a > 0$ के लिए $f(z) \in \mathbb{R}$ है तो सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z + 2ia) = f(z)$ है।
4. यदि सभी $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$ तथा किसी $a > 0$ के लिए $f(z) \in \mathbb{R}$ है तो सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z + ia) = f(z)$ है।

81. Let f be an entire function on $\mathbb{C}$. Let $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Which of the following statements is/are correct?

1. if $f(z) \in \mathbb{R}$ for all $z \in \mathbb{R}$ then $f = g$
2. if $f(z) \in \mathbb{R}$ for all $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$, for some $a > 0$, then $f(z + ia) = f(z - ia)$ for all $z \in \mathbb{C}$
3. if $f(z) \in \mathbb{R}$ for all $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$, for some $a > 0$, then $f(z + 2ia) = f(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.
4. if $f(z) \in \mathbb{R}$ for all $z \in \{z | Im\, z = 0\} \cup \{z | Im\, z = a\}$ for some $a > 0$, then $f(z + ia) = f(z)$ all $z \in \mathbb{C}$.

82. मानें कि $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है तथा r एक धन वास्तविक संख्या है। तो

1. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le \sup_{|z|=r} |f(z)|^2$
2. $\sup_{|z|=r} |f(z)|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$
4. $\sup_{|z|=r} |f(z)|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$

82. Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be an entire function and let r be a positive real number. Then

1. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le \sup_{|z|=r} |f(z)|^2$
2. $\sup_{|z|=r} |f(z)|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$
4. $\sup_{|z|=r} |f(z)|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$

83. मानें कि $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ $\mathbb{R}^2$ के अंदर एकक वृत्त है। मानें कि $f : X \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन हैं। तो:

1. प्रतिबिम्ब (f) संबद्ध है।
2. प्रतिबिम्ब (f) संहत है।
3. दी गई सूचना इस निर्धारण के लिए पर्याप्त नहीं है कि क्या प्रतिबिम्ब (f) परिमित है।
4. f एकैकी नहीं है।

83. Let $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ be the unit circle inside $\mathbb{R}^2$. Let $f : X \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then:

1. Image (f) is connected.
2. Image (f) is compact.

3. The given information is not sufficient to determine whether Image (f) is bounded.
4. f is not injective.

84. मानें कि $\mathbb{R}[x]$ सभी वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि को निर्दिष्ट करता है। मानें कि $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ मानचित्र $Df = \frac{df}{dx}, \forall f$ को निर्दिष्ट करता है।

1. D एकैकी है।
2. D आच्छादक है।
3. $E: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ का अस्तित्व है ताकि $D(E(f)) = f, \forall f$ हो।
4. $E: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ का अस्तित्व है ताकि $E(D(f)) = f, \forall f$ हो।

84. Let $\mathbb{R}[x]$ denote the vector space of all real polynomials. Let $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ denote the map $Df = \frac{df}{dx}, \forall f$. Then,

1. D is one-one.
2. D is onto.
3. There exists $E: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ so that $D(E(f)) = f, \forall f$.
4. There exists $E: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ so that $E(D(f)) = f, \forall f$.

85. मानें कि G एक अन्-आबेली समूह है। तो उसकी कोटि हो सकती है :

1. 25
2. 55
3. 125
4. 35

85. Let G be a nonabelian group. Then, its order can be:

1. 25
2. 55
3. 125
4. 35

86. आव्यूह $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान निम्न में से कौन-से हैं?

1. $+1$
2. -1
3. $+i$
4. $-i$

86. Which of the following are eigenvalues of the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

1. $+1$
2. -1
3. $+i$
4. $-i$

87. मानें कि $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}$ के ऊपर एक चर में बहुपद वलय है। मानें कि $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ एक गुणजावली है। तो

1. यदि तथा केवल यदि I एक शून्येतर अभाज्य गुणजावली है, तो ही I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।
2. यदि तथा केवल यदि विभाग वलय $\mathbb{R}[x]/I$, $\mathbb{R}$ का तुल्याकारी है, तो ही I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।
3. यदि तथा केवल यदि $I = (f(x))$ है जहां $f(x)$, $\mathbb{R}$ पर एक अचरेतर अलघुकरणीय बहुपद है, तो ही I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।
4. यदि तथा केवल यदि एक अचरेतर बहुपद $f(x) \in I$ का अस्तित्व है, जिसका घात ≤ 2 है, तो ही I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।

87. Let $\mathbb{R}[x]$ be the polynomial ring over $\mathbb{R}$ in one variable. Let $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ be an ideal. Then

1. I is a maximal ideal if and only if I is a non-zero prime ideal
2. I is a maximal ideal if and only if the quotient ring $\mathbb{R}[x]/I$ is isomorphic to $\mathbb{R}$
3. I is a maximal ideal if and only if $I = (f(x))$, where $f(x)$ is a non-constant irreducible polynomial over $\mathbb{R}$
4. I is a maximal ideal if and only if there exists a nonconstant polynomial $f(x) \in I$ of degree ≤ 2

88. मानें कि G कोटि 45 का एक समूह है।
1. G का एक अवयव कोटि 9 का है।
2. G का एक उपसमूह कोटि 9 का है।
3. G का एक प्रसामान्य उपसमूह कोटि 9 का है।
4. G का एक प्रसामान्य उपसमूह कोटि 5 का है।

88. Let G be a group of order 45. Then
1. G has an element of order 9
2. G has a subgroup of order 9
3. G has a normal subgroup of order 9
4. G has a normal subgroup of order 5

89. निम्न में कौन-सा/से सही है/हैं?
1. किसी घन पूर्णांक n के दिये जाने पर, $\mathbb{Q}$ के कोटि n के क्षेत्र विस्तरण का अस्तित्व है।
2. किसी घन पूर्णांक n के दिये जाने पर, क्षेत्र F तथा K के अस्तित्व हैं ताकि $F \subseteq K$ तथा K, F के ऊपर $[K:F] = n$ के साथ गाल्वा है।
3. मानें कि K, $[K:\mathbb{Q}] = 4$ के साथ $\mathbb{Q}$ का एक गाल्वा विस्तरण है । तो एक क्षेत्र L है ताकि $K \supseteq L \supseteq \mathbb{Q}, [L:\mathbb{Q}] = 2$ तथा $L, \mathbb{Q}$ का एक गाल्वा विस्तरण है।
4. $\mathbb{Q}$ का एक बीजीय विस्तरण K है ताकि $[K:\mathbb{Q}]$ परिमित नहीं है।

89. Which of the following is/are true?
1. Given any positive integer n, there exists a field extension of $\mathbb{Q}$ of degree n.
2. Given a positive integer n, there exist fields F and K such that $F \subseteq K$ and K is Galois over F with $[K:F] = n$.
3. Let K be a Galois extension of $\mathbb{Q}$ with $[K:\mathbb{Q}] = 4$. Then there is a field L such that $K \supseteq L \supseteq \mathbb{Q}, [L:\mathbb{Q}] = 2$ and L is a Galois extension of $\mathbb{Q}$.
4. There is an algebraic extension K of $\mathbb{Q}$ such that $[K:\mathbb{Q}]$ is not finite.

90. मानें कि $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ है, जहां $x, y \in \mathbb{R}$ हैं, ताकि $x^2 + y^2 = 1$ है। तो हमें पाना चाहिये कि
1. किसी भी $n \geq 1$ के लिए $A^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ जहां $x = \cos(\theta/n), y = \sin(\theta/n)$
2. $tr(A) \neq 0$
3. $A^t = A^{-1}$
4. $\mathbb{C}$ पर, A एक विकर्ण आव्यूह के समरूप है।

90. Let $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, where $x, y \in \mathbb{R}$ such that $x^2 + y^2 = 1$. Then we must have:
1. For any $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ where $x = \cos(\theta/n), y = \sin(\theta/n)$
2. $tr(A) \neq 0$
3. $A^t = A^{-1}$
4. A is similar to a diagonal matrix over $\mathbb{C}$

यूनिट/Unit - 3

91. सा.अ.स. तंत्र
$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (1+x^2)y,\ t \in \mathbb{R} \\ \frac{dy}{dt} = -(1+x^2)x,\ t \in \mathbb{R} \\ (x(0), y(0)) = (a, b) \end{array}\right\}$$
का एक हल है:
1. केवल यदि $(a, b) = (0,0)$
2. किसी भी $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ के लिए।
3. ताकि सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $x^2(t) + y^2(t) = a^2 + b^2$ है।
4. ताकि $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$, जैसे $t \to \infty$ यदि $a > 0$ तथा $b > 0$ हैं।

91. The system of ODE
$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (1+x^2)y,\ t \in \mathbb{R} \\ \frac{dy}{dt} = -(1+x^2)x,\ t \in \mathbb{R} \\ (x(0), y(0)) = (a, b) \end{array}\right\}$$
has a solution:
1. only if $(a, b) = (0,0)$
2. for any $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3. such that $x^2(t) + y^2(t) = a^2 + b^2$ for all $t \in \mathbb{R}$
4. such that $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ as $t \to \infty$ if $a > 0$ and $b > 0$

92. मानें कि $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ सा.अ.स.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} - y = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{array}\right\}$$

का एक हल है। तो

1. $\mathbb{R}$ पर y एक न्यूनतम पाता है।
2. $\mathbb{R}$ पर y परिबद्ध है।
3. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} y(x) = \frac{1}{4}$
4. $\lim_{x\to-\infty} e^{x} y(x) = \frac{1}{4}$

92. Let $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a solution of the ODE

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} - y = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{array}\right\}$$

then

1. y attains its minimum on $\mathbb{R}$
2. y is bounded on $\mathbb{R}$
3. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} y(x) = \frac{1}{4}$
4. $\lim_{x\to-\infty} e^{x} y(x) = \frac{1}{4}$

93. कुछ $\lambda \neq 0$ तथा $a \neq 0$ के लिए मानें कि $u \in c^2([0,1])$,

$u(x) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 |x-s| u(s)ds = ax + b$

का समाधान करता है। तो u इसका भी समाधान करता है:

1. $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$
2. $\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u = 0$
3. $\frac{du}{dx} - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{x-s}{|x-s|} u(s)ds = a$
4. $\frac{du}{dx} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{x-s}{|x-s|} u(s)ds = a$

93. Let $u \in c^2([0,1])$ satisfy for some $\lambda \neq 0$ and $a \neq 0$

$u(x) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 |x-s| u(s)ds = ax + b$

Then u also satisfies

1. $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$
2. $\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u = 0$
3. $\frac{du}{dx} - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{x-s}{|x-s|} u(s)ds = a$
4. $\frac{du}{dx} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{x-s}{|x-s|} u(s)ds = a$

94. मानें कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक शून्येतर अवकलज युक्त मसृण फलन है। $f(x) = 0$ के एक मूल को पाने के लिए न्यूटन की विधि वही है जो

1. मानचित्र $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ के लिए नियत बिन्दु पुनरावृत्ति है।
2. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dt} + \frac{f(y)}{f'(y)} = 0$ के लिए एकक चरण का अग्र ऑयलर विधि है।
3. $g(x) = x + f(x)$ के लिए नियत बिंदु पुनरावृत्ति है।
4. $g(x) = x - f(x)$ के लिए नियत बिंदु पुनरावृत्ति है।

94. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a smooth function with non-vanishing derivative. The Newton's method for finding a root of $f(x) = 0$ is the same as

1. fixed point iteration for the map $g(x) = x - f(x)/f'(x)$
2. Forward Euler method with unit step length for the differential equation $\frac{dy}{dt} + \frac{f(y)}{f'(y)} = 0$
3. fixed point iteration for $g(x) = x + f(x)$
4. fixed point iteration for $g(x) = x - f(x)$

95. एक मसृण वक्र $\phi(x,y) = 0$ पर निर्देशांकों $(x(t), y(t))$ के साथ गतिशील एक कण पर विचारें। यदि कण $(x(0), y(0))$ से $(x(\tau), y(\tau))$ तक $\tau > 0$ के लिए गतिशील है ताकि उसकी गतिक ऊर्जा न्यूनतमीकृत है, तो

1. $\frac{\dot{x}}{\phi_x} = \frac{\dot{y}}{\phi_y}$
2. $\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) = \dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)$
3. $\dot{x}\phi_x + \dot{y}\phi_y = 0$
4. $\dot{x}^2(0) = \dot{x}^2(\tau)$

95. Consider a particle moving with coordinates $(x(t), y(t))$ on a smooth curve $\phi(x,y) = 0$. If the particle moves from $(x(0), y(0))$ to $(x(\tau), y(\tau))$ for $\tau > 0$ such that its kinetic energy is minimized, then

1. $\frac{\dot{x}}{\phi_x} = \frac{\dot{y}}{\phi_y}$
2. $\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) = \dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)$

3. $\dot{x}\phi_x + \dot{y}\phi_y = 0$
4. $\dot{x}^2(0) = \dot{x}^2(\tau)$

96. मानें कि $y(0) = y(\pi) = 0$, $\int_0^\pi y^2(x)dx = 1$ का समाधान $y \in C^2([0,\pi])$ करता है तथा फलनक $J(y) = \int_0^\pi (y'(x))^2 dx;\ y' = \frac{dy}{dx}$ को चरमित करता है। तो y हो सकता है

1. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$
2. $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$
3. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$
4. $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$

96. Let $y \in C^2([0,\pi])$ satisfying $y(0) = y(\pi) = 0$ and $\int_0^\pi y^2(x)dx = 1$ extremize the functional

$$J(y) = \int_0^\pi (y'(x))^2 dx;\ y' = \frac{dy}{dx}.$$

Then

1. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$
2. $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$
3. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$
4. $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$

97. $u = u(x,t)$ को खोजने की कोशी समस्या पर विचारें ताकि $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$ के लिए $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$; u_0 के लिए निम्न फलनों का/के कौन-सा/से चयन, सभी $x \in \mathbb{R}$ तथा $t > 0$ के लिए C^1 हल $u(x,t)$ देगा/देगें?

1. $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. $u_0(x) = x$
3. $u_0(x) = 1 + x^2$
4. $u_0(x) = 1 + 2x$

97. Consider the Cauchy problem of finding $u = u(x,t)$ such that

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Which choice(s) of the following functions for u_0 yield a C^1 solution $u(x,t)$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $t > 0$.

1. $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. $u_0(x) = x$
3. $u_0(x) = 1 + x^2$
4. $u_0(x) = 1 + 2x$

98. मानें कि P, Q $[-1,1]$ पर परिभाषित संतत वास्तविक मान फलन हैं तथा $u_i: [-1,1] \to \mathbb{R}, i = 1,2$ सा.अ.स.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + Q(x)u = 0, x \in [-1,1]$$

के हल हैं, जो $u_1 \geq 0, u_2 \leq 0$ तथा $u_1(0) = u_2(0) = 0$ के समाधान करते है। u_1 तथा u_2, के रांस्कियन को मानें कि w निर्दिष्ट करता है। तो

1. u_1 तथा u_2 रैखिकत: स्वतंत्र हैं।
2. u_1 तथा u_2 रेखिकत: आश्रित हैं।
3. सभी $x \in [-1,1]$ के लिए $w(x) = 0$ है।
4. कुछ $x \in [-1,1]$ के लिए $w(x) \neq 0$ है।

98. Let P, Q be continuous real valued functions defined on $[-1,1]$ and $u_i: [-1,1] \to \mathbb{R}, i = 1,2$ be solutions of the ODE:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + Q(x)u = 0, x \in [-1,1]$$

satisfying $u_1 \geq 0, u_2 \leq 0$ and $u_1(0) = u_2(0) = 0$.
Let w denote the Wronskian of u_1 and u_2, then

1. u_1 and u_2 are linearly independent
2. u_1 and u_2 are linearly dependent
3. $w(x) = 0$ for all $x \in [-1,1]$
4. $w(x) \neq 0$ for some $x \in [-1,1]$

99. किसी मसृण फलन f के बिंदु x पर अवकलजों के आकलन के लिये निम्न सन्निकटनों में से किसका घात 2 है (अर्थात् त्रुटि पद $O(h^2)$है) ?

1. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
3. $f'(x) \approx \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$
4. $f'(x) \approx \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h}$

99. Which of the following approximations for estimating the derivative of a smooth function f at a point x is of order 2 (i.e. the error term is $O(h^2)$)

1. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
3. $f'(x) \approx \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$
4. $f'(x) \approx \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h}$

100. सभी $x \in \mathbb{R}, t > 0$ के लिए मानें कि $u(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ का समाधान करता है।
$u = e^{ix}\, v(t)$ रूपी एक हल, $v(0) = 0$ तथा $v'(0) = 1$ के साथ,

1. आवश्यकत: परिबद्ध है।
2. $|u(x,t)| < e^t$ का समाधान है।
3. आवश्यकत: अपरिबद्ध है।
4. x में दोलनी है।

100. Let $u(x,t)$ satisfy for $x \in \mathbb{R}, t > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

A solution of the form $u = e^{ix}\, v(t)$ with $v(0) = 0$ and $v'(0) = 1$

1. is necessarily bounded
2. satisfies $|u(x,t)| < e^t$
3. is necessarily unbounded
4. is oscillatory in x.

101. मानें कि कोशी समस्या $\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 1,$ $x \in \mathbb{R}, t > 0;\ u(x,0) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ का हल है $u = u(x,t)$ । तो

1. $u(x,t)$ का, सभी $x \in \mathbb{R}$ तथा $t > 0$ के लिए अस्तित्व है।
2. कुछ $t^* > 0$ तथा $x \neq 0$ के लिए जब $t \to t^*$, $|u(x,t)| \to \infty$ ।
3. सभी $x \in \mathbb{R}$ तथा सभी $t < 1/4$ के लिए $u(x,t) \le 0$ है।
4. कुछ $x \in \mathbb{R}$ तथा $0 < t < 1/4$ के लिए $u(x,t) > 0$ है।

101. Let $u = u(x,t)$ be the solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 1 \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = -x^2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Then

1. $u(x,t)$ exists for all $x \in \mathbb{R}$ and $t > 0$.
2. $|u(x,t)| \to \infty$ as $t \to t^*$ for some $t^* > 0$ and $x \neq 0$
3. $u(x,t) \le 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ and for all $t < 1/4$.
4. $u(x,t) > 0$ for some $x \in \mathbb{R}$ and $0 < t < 1/4$.

102. मानें कि अवकल समीकरण $y' = \lambda y; y(0) = 1$ का $y(t)$ समाधान करता है। तो $n \ge 1$ तथा $h > 0$ के लिए पश्च ऑयलर विधि $\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \lambda y_n;\ y_0 = 1$ देता है

1. $e^{\lambda nh}$ के लिए एक प्रथम कोटि सन्निकटन
2. $e^{\lambda nh}$ के लिए एक बहुपद सन्निकटन
3. $e^{\lambda nh}$ के लिए एक परिमेय फलन सन्निकटन
4. $e^{\lambda nh}$ के लिए एक शेबिशेव बहुपद सन्निकटन

102. Let $y(t)$ satisfy the differential equation $y' = \lambda y; y(0) = 1.$
Then the backward Euler method, for $n \ge 1$ and $h > 0$

$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \lambda y_n;\ y_0 = 1$
yields

1. a first order approximation to $e^{\lambda nh}$
2. a polynomial approximation to $e^{\lambda nh}$
3. a rational function approximation to $e^{\lambda nh}$
4. a Chebyshev polynomial approximation to $e^{\lambda nh}$

यूनिट/Unit - 4

103. मानें कि X एक यादृच्छिक चर है ताकि $E(X) = 0, E(X^2) = 2$ तथा $E(X^4) = 4$ है। तो

1. $E(X^3) = 0$
2. $P(X \geq 0) = 1/2$
3. $X \sim N(0,2)$
4. X प्रायकिता 1 के साथ परिबद्ध है।

103. Suppose X is a random variable such that $E(X) = 0, E(X^2) = 2$ and $E(X^4) = 4$. Then

1. $E(X^3) = 0$
2. $P(X \geq 0) = 1/2$
3. $X \sim N(0,2)$
4. X is bounded with probability 1.

104. मानें कि घनत्व फलन f रखने वाले X_1, X_2, X_3 तथा X_4 स्वतंत्र तथा सर्वथासमान बंटित यादृच्छिक चर हैं। तो

1. $P(X_4 > \max(X_1, X_2) > X_3) = \frac{1}{6}$
2. $P(X_4 > \max(X_1, X_2) > X_3) = \frac{1}{8}$
3. $P(X_4 > X_3 > \max(X_1, X_2)) = \frac{1}{12}$
4. $P(X_4 > X_3 > \max(X_1, X_2)) = \frac{1}{6}$

104. Suppose X_1, X_2, X_3 and X_4 are independent and identically distributed random variables, having density function f. Then,

1. $P(X_4 > \max(X_1, X_2) > X_3) = \frac{1}{6}$
2. $P(X_4 > \max(X_1, X_2) > X_3) = \frac{1}{8}$
3. $P(X_4 > X_3 > \max(X_1, X_2)) = \frac{1}{12}$
4. $P(X_4 > X_3 > \max(X_1, X_2)) = \frac{1}{6}$

105. मानें कि $X_1, X_2, X_3, \ldots$ स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, $E(X_k) = 0$ तथा $\mathrm{Var}(X_k) = k$ के साथ। मानें कि $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, तो जब $n \to \infty$,

1. प्रायिकता में $\frac{S_n}{n^{3/2}} \to 0$
2. बंटन में $\frac{S_n}{n^{3/2}} \to 0$
3. बंटन में $\frac{S_n X_n}{n^{\frac{5}{2}}} \to 0$
4. प्रायिकता में $\frac{S_n X_n}{n^{5/2}} \to 0$

105. Let $X_1, X_2, X_3, \ldots$ be independent random variables with $E(X_k) = 0$ and $\mathrm{Var}(X_k) = k$. Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ .Then, as $n \to \infty$,

1. $\frac{S_n}{n^{3/2}} \to 0$ in probability
2. $\frac{S_n}{n^{3/2}} \to 0$ in distribution
3. $\frac{S_n X_n}{n^{5/2}} \to 0$ in distribution
4. $\frac{S_n X_n}{n^{5/2}} \to 0$ in probability

106. अवस्था समष्टि $\{1, 2, \ldots, 100\}$ युक्त एक मॉर्कोव शृंखला पर विचारें । मानें कि अवस्थायें $2i$ तथा $2j$ एक दूसरे के साथ संपर्क रखते हैं तथा अवस्थायें $2i - 1$ तथा $2j - 1$ आपसी संपर्क रखते हैं, हर $i, j = 1, 2, \ldots, 50$ के लिए। और मानें कि $p_{3,3}^{(2)} > 0, p_{4,4}^{(3)} > 0$ तथा $p_{2,5}^{(7)} > 0$, तो

1. मॉकोव शृंखला अलघुकरणीय है।
2. मॉकोव शृंखला अनावर्ती है।
3. अवस्था 8 पुनरावर्ती है।
4. अवस्था 9 पुनरावर्ती है।

106. Consider a Markov chain with state space $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Suppose states $2i$ and $2j$ communicate with each other and states $2i-1$ and $2j-1$ communicate with each other for every $i, j = 1, 2, \ldots, 50$. Further suppose that $p_{3,3}^{(2)} > 0, p_{4,4}^{(3)} > 0$ and $p_{2,5}^{(7)} > 0$. Then

1. The Markov chain is irreducible.
2. The Markov chain is aperiodic.
3. State 8 is recurrent.
4. State 9 is recurrent.

107. परिमित अवस्था समष्टि युक्त एक मॉकोव शृंखला के लिए स्थावर बंटनों की संख्या हो सकती है

1. 0
2. 1
3. 2
4. ∞

107. For a Markov chain with finite state space, the number of stationary distributions can be

1. 0
2. 1
3. 2
4. ∞

108. $N, A_1, A_2, \ldots$ स्वतंत्र वास्तविक मान यादृच्छिक चर हैं ताकि $P(N=k) = (1-p)p^k, k = 0,1,2,\ldots$ जहां $0 < p < 1$, तथा $\{A_i: i = 1,2,\ldots\}$ स्वतंत्र एवं सवर्थासमानत: बंटित परिबद्ध यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है। मानें कि

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{if } N(w) = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} A_j & \text{if } N(w) = k, k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

निम्न में कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. X एक परिबद्ध यादृच्छिक चर है।
2. X का आघूर्णजनक फलन m_X है: $m_X(t) = \frac{(1-p)}{1-pm_A(t)}, t \in \mathbb{R}$, जहां m_A, A_1का आघूर्णजनक फलन है।
3. X का अभिलक्षण-फलन φ_X है: $\varphi_X(t) = \frac{(1-p)}{1-p\varphi_A(t)}, t \in \mathbb{R}$, जहां φ_A, A_1का अभिलक्षण फलन है।
4. 0 के आर-पार X सममित है।

108. $N, A_1, A_2, \ldots$ are independent real valued random variables such that

$$P(N=k) = (1-p)p^k, k = 0,1,2,\ldots$$

where $0 < p < 1$, and $\{A_i: i = 1,2,\ldots\}$ is a sequence of independent and identically distributed bounded random variables. Let

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{if } N(w) = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} A_j & \text{if } N(w) = k, k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Which of the following are necessarily correct?

1. X is a bounded random variable
2. Moment generating function m_X of X is $$m_X(t) = \frac{(1-p)}{1-pm_A(t)}, t \in \mathbb{R},$$ where m_A is the moment generating function of A_1.
3. Characteristic function φ_X of X is $\varphi_X(t) = \frac{(1-p)}{1-p\varphi_A(t)}, t \in \mathbb{R}$, where φ_A is the characteristic function of A_1.
4. X is symmetric about 0.

109. मानें कि $\phi(t)$ किसी यादृच्छिक चर का अभिलक्षण-फलन है। तो निम्न में से कौन-से भी अभिलक्षण-फलन हैं?

1. सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $f(t) = [\phi(t)]^2$
2. सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $f(t) = |\phi(t)|^2$
3. सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $f(t) = \phi(-t)$
4. सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $f(t) = \phi(t+1)$

109. Let $\phi(t)$ be a characteristic function of some random variable. Then, which of the following are also characteristic function?

1. $f(t) = [\phi(t)]^2$ for all $t \in \mathbb{R}$.
2. $f(t) = |\phi(t)|^2$ for all $t \in \mathbb{R}$.
3. $f(t) = \phi(-t)$ for all $t \in \mathbb{R}$.
4. $f(t) = \phi(t+1)$ for all $t \in \mathbb{R}$.

110. मानें कि घनत्व $f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)}, x > \mu$ (जहां $-\infty < \mu < \infty$ तथा μ अज्ञात है) युक्त बंटन से पाये गये स्वतंत्रत: तथा सवर्थासमानत: बंटित प्रेक्षण $X_1, X_2, \ldots, X_n$ हैं। मानें कि $T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$

तथा $T_2 = 2X_{(1)}$,जहां $X_{(1)}$ न्यूनतम क्रम-प्रतिदर्शज है। $H_0: \mu = 0$ बनाम $H_1: \mu > 0$ के परीक्षण स्तर α पर, जहां $0 < \alpha < 1$ है, के लिए निम्न दिये गये दो परीक्षणों A तथा B के बारे में विचारें।

A: यदि $T_1 > C_1$ जहां C_1 वैसे है ताकि $P(Y_1 > C_1) = \alpha, Y_1 \sim \chi^2_{2n}$ के साथ, तो H_0 को अस्वीकार करें।

B: यदि $T_2 > C_2$ जहां C_2 वैसे है ताकि $P(Y_2 > C_2) = \alpha, Y_2 \sim \chi^2_2$ के साथ, तो H_0 को अस्वीकार करें।

तो निम्न कथनों में से कौन-से मान्य हैं?

1. A तथा B दोनों स्तर α के परीक्षण हैं।
2. A एकसमानतः शक्ततम स्तर α का परीक्षण है।
3. B एकसमानतः शक्ततम स्तर α का परीक्षण है।
4. किसी $\mu > 0$ पर A की तुलना में B शक्ततर है।

110. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be independent and identically distributed observations from the distribution with density

$$f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)}, x > \mu$$

where $-\infty < \mu < \infty$ and μ is unknown. Let $T_1 = 2\sum_{i=1}^{n} X_i$ and $T_2 = 2X_{(1)}$ where $X_{(1)}$ is the smallest order statistic. To test $H_0: \mu = 0$ versus $H_1: \mu > 0$ at level α, where $0 < \alpha < 1$, consider the two tests A and B given below.

A: Reject H_0 if $T_1 > C_1$ where C_1 is such that $P(Y_1 > C_1) = \alpha$ with $Y_1 \sim \chi^2_{2n}$

B: Reject H_0 if $T_2 > C_2$ where C_2 is such that $P(Y_2 > C_2) = \alpha$ with $Y_2 \sim \chi^2_2$

Then which of the following statements are valid?

1. Both A and B are level α tests
2. A is the uniformly most powerful level α test
3. B is the uniformly most powerful level α test
4. B is more powerful than A at any $\mu > 0$

111. मानें कि $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 3$, $N(\mu, 1)$ जनसंख्या से, जहां μ अज्ञात है, लिया गया यादृच्छिक नमूना है। परिभाषित करें कि $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ है। निम्न में से कौन-से आवश्यकतः सही हैं?

1. $\text{Cov}(X_1 - 3X_2 + 2X_3, \bar{X}_n) = 0$
2. μ के अनभिनत आकलकों के लिए क्रैमर- राव निम्न परिबंध $\frac{1}{n}$ है।
3. $\text{Var}(\bar{X}_n) < \text{Var}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \cdots + nX_n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$
4. μ के लिए किसी पर्याप्त प्रतिदर्शज का फलन $\bar{X}_n$ है।

111. Let $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 3$, be a random sample from $N(\mu, 1)$ population where μ is unknown. Define $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Which of the following are necessaily true?

1. $\text{Cov}(X_1 - 3X_2 + 2X_3, \bar{X}_n) = 0$
2. Cramer-Rao lower bound for unbiased estimators of μ is $\frac{1}{n}$
3. $\text{Var}(\bar{X}_n) < \text{Var}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \cdots + nX_n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$
4. $\bar{X}_n$ is a function of any sufficient statistic for μ

112. मत्स्य में पारा के स्तर निर्धारण की दो विधियां A तथा B हैं। A तथा B की तुलना के एक अध्ययन में $n = 12$ मत्स्यों में पारा की मात्रा दोनों विधियों के अनुसार मापा गया । मानें कि $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ वे मापन हैं, जहां X_i's विधि A द्वारा किये गये मापन एवं Y_i's विधि B द्वारा किये गये मापन को निर्दिष्ट करते हैं। इसको ध्यान में रखते हुए कि मापन में त्रुटि का आमाप पारा की मात्रा पर निर्भर हो सकता है, प्रेक्षणों $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ के सवर्थासमानतः बंटित नहीं होने की संभावना है।

H_0: विधियों A तथा B में कोई अंतर नहीं है

बनाम

H_1: विधि A की तुलना में विधि B सामान्यत: अधिकतर पाठ्यांक देती है।

के परीक्षण के लिए निम्न परीक्षण सांख्यिकियों में से कौन-से उपयुक्त हैं?

1. $(Y_j > X_i)$, $1 \le i \le n; 1 \le j \le n$ वाले युगलों(X_i, Y_j) की संख्या
2. समग्र नमूने में Y प्रेक्षणों की कोटियों का योगफल
3. $(Y_i > X_i)$, $1 \le i \le n$ वाले युगलों (X_i, Y_i) की संख्या
4. $\bar{Y} - \bar{X}$

112. A and B are two methods to determine the levels of mercury in fish. In a study to compare A and B, amount of mercury was measured using both methods on $n = 12$ fish. Let $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ be those measurements, with X_i's standing for method A and Y_i's for method B. It should be noted that the size of error in measurement can depend on the amount of mercury, so the observations $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ may not be identically distributed. To test

H_0: There is no difference between methods A and B

versus

H_1: Method B typically gives a larger reading than method A,

which of the following test statistics are appropriate?

1. Number of pairs (X_i, Y_j) with $(Y_j > X_i)$, $1 \le i \le n; 1 \le j \le n$
2. Sum of the ranks of the Y observations in the combined sample
3. Number of the pairs (X_i, Y_i) with $(Y_i > X_i)$, $1 \le i \le n$
4. $\bar{Y} - \bar{X}$

113. मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ स्वतंत्र एवं सर्वथासमानत: बंटित बर्नूली (θ) है, जहां $0 < \theta < 1$ तथा $n > 1$ है। मानें कि θ का पूर्वघनत्व $\frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}, 0 < \theta < 1$ के अनुपात में है। परिभाषित करें कि $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. तो निम्न में मान्य कथन हैं:

1. θ के पश्च-माध्य का अस्तित्व नहीं है।
2. θ के पश्च-माध्य का अस्तित्व है।
3. θ के पश्च-माध्य का अस्तित्व है तथा S के सभी मानों के लिए उच्चतम प्रायिकता आकलक से वह अधिकतर है।
4. θ के पश्च-माध्य का अस्तित्व है तथा S के कुछ मानों के लिए उच्चतम प्रायिकता आकलक से वह अधिकतर है।

113. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent and identically distributed Bernoulli (θ), where $0 < \theta < 1$ and $n > 1$. Let the prior density of θ be proportional to $\frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}, 0 < \theta < 1$. Define $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Then valid statements among the following are:

1. The posterior mean of θ does not exist;
2. The posterior mean of θ exists;
3. The posterior mean of θ exists and it is larger than the maximum likelihood estimator for all values of S;
4. The posterior mean of θ exists and it is larger than the maximum likelihood estimator for some values of S.

114. रैखिक प्रतिमान $E(Y) = X\beta, \mathrm{Cov}(Y) = \sigma^2 I$ जहां X आमाप $n \times p$ का, कोटि $r \le p$ का एक आव्यूह है, पर विचारें। तो निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकता सही हैं?

1. आकलनीय रैखिक फलनों का समुच्चय विमा r की एक सदिश समष्टि की रचना करता है।
2. कुछ शून्येतर सदिश c के लिए यदि $E(c'Y) = 0$ है, तो ऐसे एक फलन $l'\beta$ है जो आकलनीय नहीं है।
3. यदि सभी रैखिक फलन $l'\beta$ आकलनीय हैं, तो $r = p$ है।
4. $E(c'Y) = 0$ युक्त फलनों $c'Y$ का समुच्चय विमा r की सदिश समष्टि की रचना करता है।

114. Consider the linear model $E(Y) = X\beta$, $\mathrm{Cov}(Y) = \sigma^2 I$ where X is a matrix of size $n \times p$ having rank $r \leq p$. Then which of the following statements are necessarily true?

1. The set of estimable linear functions form a vector space of dimension r.
2. If $E(c'Y) = 0$ for some nonzero vector c, then there is a function $l'\beta$ which is not estimable.
3. If all linear functions $l'\beta$ are estimable, then $r = p$.
4. The set of functions $c'Y$ with $E(c'Y) = 0$ form a vector space of dimension r.

115. निम्न रैखिक प्रतिमान पर विचारें

$y_1 = 2\theta + \beta + \epsilon_1$

$y_2 = \beta + 2\gamma + \epsilon_2$

$y_3 = \theta + \beta + \gamma + \epsilon_3$

जहां θ, β, γ अज्ञात प्राचल हैं तथा $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ माध्य 0 तथा अचर प्रसरण युक्त असहसंबंधित यादृच्छिक त्रुटियां हैं। तो निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. θ, β तथा γ आकलनीय हैं।
2. $\theta - \gamma$ आकलनीय हैं।
3. $2\gamma - 2\theta$ आकलनीय हैं।
4. $\theta + \gamma$ आकलनीय हैं।

115. Consider the linear model

$y_1 = 2\theta + \beta + \epsilon_1$

$y_2 = \beta + 2\gamma + \epsilon_2$

$y_3 = \theta + \beta + \gamma + \epsilon_3$

where θ, β, γ are unknown parameters and $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ are uncorrelated random errors with mean 0 and constant variance. Then which of the following statements are true?

1. θ, β and γ are estimable
2. $\theta - \gamma$ is estimable
3. $2\gamma - 2\theta$ is estimable
4. $\theta + \gamma$ is estimable

116. मानें कि Y बहुचर प्रसामान्य बंटन $N_n(\mathbf{0}, I)$ का अनुकरण करता है तथा A एवं B $n \times n$ सममित, वर्गसम आव्यूह हैं। तो निम्न कथनों में से कौन से सही हैं?

1. यदि $AB = 0$ है तो $Y'AY$ एवं $Y'BY$ स्वतंत्रत: बंटित हैं।
2. यदि $Y'(A+B)Y$ का काई-वर्ग बंटन है तो $Y'AY$ एवं $Y'BY$ स्वतंत्रत: बंटित हैं।
3. $Y'(A-B)Y$ का काई-वर्ग बंटन है।
4. $Y'AY$ तथा $Y'BY$ के काई-वर्ग बंटन हैं।

116. Let $\mathbf{Y}$ follow multivariate normal distribution $N_n(\mathbf{0}, I)$ and let A and B be $n \times n$ symmetric, idempotent matrices. Then which of the following statements are true?

1. If $AB = 0$, then $Y'AY$ and $Y'BY$ are independently distributed.
2. If $Y'(A+B)Y$ has chi-square distribution then $Y'AY$ and $Y'BY$ are independently distributed.
3. $Y'(A-B)Y$ has chi-square distribution.
4. $Y'AY$ and $Y'BY$ have chi-square distribution.

117. सहप्रसरण आव्यूह $\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho & 0 \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ 0 & \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}$ युक्त एक त्रिचर जनसंख्या पर विचारें, जहाँ $\sigma^2 > 0, \rho > 0$ है। तो निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $\rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. प्रथम मुख्य घटक से व्याख्यित कुल जनसंख्या प्रसरण का अनुपात $\frac{1+2\rho}{3}$ है।
3. द्वितीय मुख्य घटक प्रथम एवं तृतीय मुख्य घटकों से असहसंबंधित है।
4. प्रथम दो मुख्य घटकों द्वारा व्याख्यित कुल जनसंख्या प्रसरण का अनुपात $\frac{\sqrt{2}}{3}(\rho + \sqrt{2})$ है।

117. Consider a 3-variate population with covariance matrix $\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho & 0 \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ 0 & \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}$ where $\sigma^2 > 0, \rho > 0$. Then which of the following statements are true?

1. $\rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. The proportion of the total population variance explained by the first principal component is $\frac{1+2\rho}{3}$
3. The second principal component is uncorrelated with the first and the third principal component.
4. The proportion of the total population variance explained by the first two principal components is $\frac{\sqrt{2}}{3}(\rho + \sqrt{2})$

118. तीन उपादान A, B तथा C युक्त एक 2^3 बहु-उपादानी प्रयोग पर विचारें। मानें कि आठ उपचार हर एक के चार प्रतिकृतियों के दो खंडों में निम्नवत निर्दिष्ट किये जाते हैं।

प्रतिकृति 1		प्रतिकृति 2		प्रतिकृति 3		प्रतिकृति 4	
(1)	b	(1)	a	(1)	a	(1)	b
a	c	b	c	c	b	ab	a
bc	ac	ac	bc	ab	ac	bc	c
abc	ab	abc	ab	abc	bc	ac	abc

निम्न में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. यह संपूर्ण संकरण का एक उदाहरण है।
2. प्रतिकृति 1 में AB संकरित है।
3. प्रतिकृति 2 में AC संकरित है।
4. प्रतिकृति 4 में ABC संकरित है।

118. Consider a 2^3 factorial experiment with three factors A, B and C. Suppose eight treatments are assigned in two blocks of each of the four replicates in the following way.

Replicate 1		Replicate 2		Replicate 3		Replicate 4	
(1)	b	(1)	a	(1)	a	(1)	b
a	c	b	c	c	b	ab	a
bc	ac	ac	bc	ab	ac	bc	c
abc	ab	abc	ab	abc	bc	ac	abc

Which of the following are necessarily true?

1. This is an example of complete confounding
2. AB is confounded in Replicate 1
3. AC is confounded in Replicate 2
4. ABC is confounded in Replicate 4

119. मानें कि आमाप n का एक प्रतिदर्श एक परिमित जनसंख्या N इकाइयां, जहाँ $N > n$ हैं से बिना पुन:स्थापन एक साधारण यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा निकाला जाता है तथा चयनित इकायों से संगत अध्ययन चरों के प्रतिदर्श माध्य को $\bar{y}$ से निर्दिष्ट किया जाता है । अब मानें कि हम एक इकाई से संगत एक चर मान y_1 को जानते हैं, तथा शेष $(N-1)$ इकाकयों से बिना प्रति:स्थापन के एक साधारण यादृच्छिक, आमाप n का प्रतिदर्श निकालते हैं तथा चयनित इकाइयों से संगत अध्ययन चरों के प्रतिदर्श माध्य को $\bar{y}_0$ से निर्दिष्ट करते हैं। परिभाषित करें $t_1 = N\bar{y}, t_2 = (N-1)\bar{y}_0 + y_1, V_1 = \text{Var}(t_1)$ तथा $V_2 = \text{Var}(t_2)$। निम्न में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. जनसंख्या योगफल के लिए t_1 अनभिनत है।
2. जनसंख्या योगफल के लिए t_2 अनभिनत है।
3. $V_1 = N^2 \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$ जहाँ σ^2 = जनसंख्या प्रसरण है।
4. $V_2 \leq V_1$, सभी n, N के लिए।

119. Suppose a sample of size n is drawn using simple random sampling without replacement from a finite population of N units where $N > n$ and denote the sample mean of the study variables corresponding to the selected units by $\bar{y}$. Now suppose we know one variate value y_1 corresponding to one unit and draw a simple random sample of size n without replacement from the remaining $(N-1)$ units and denote the sample mean of the study variables corresponding to the selected units by $\bar{y}_0$. Define $t_1 = N\bar{y}, t_2 = (N-1)\bar{y}_0 + y_1, V_1 = \text{Var}(t_1)$ and $V_2 = \text{Var}(t_2)$. Which of the following are necessarily true?

1. t_1 is unbiased for population total
2. t_2 is unbiased for population total
3. $V_1 = N^2 \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$ where $\sigma^2 =$ population variance
4. $V_2 \leq V_1$ for all n, N

120. मानें कि आगमन गति $\lambda > 0$ एवं सेवा गति $\mu > 0$ युक्त एक M/M/1 पंक्ति निदर्श में $X(t) =$ समय t पर तंत्र में ग्राहकों की संख्या है। जभी उसका अस्तित्व है, मानें कि $\pi_k = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = k), k = 0, 1, 2 \cdots$ । निम्न में कौन-से सही हैं?

1. $\{X(t)\}$ एक जनन तथा मरण प्रक्रिया है, जनन गतियों $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, \ldots$ एवं मरण गतियों $\mu_k = \mu, k = 1, 2, \ldots$ के साथ।
2. $\{X(t)\}$ एक जनन एवं मरण प्रक्रिया है, जनन गतियों $\lambda_k = \frac{1}{\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots$ तथा मरण गतियों $\mu_k = \frac{1}{\mu}, k = 1, 2, \ldots$ के साथ।
3. यदि तथा केवल यदि $\mu > \lambda$ है,तभी सीमांत बंटन $\{\pi_k\}$का अस्तित्व है, तथा वह, प्राचल $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ युक्त ज्यामितीय बंटन है।
4. यदि आनेवाला एक ग्राहक एक ही ग्राहक को पंक्ति में पाता है, तो तंत्र में उसका कुल प्रतीक्षा काल प्राचल (2μ) युक्त एक चरघातांकी बंटन रखता है।

120. Let $X(t) =$ number of customers at time t in the system in an M/M/1 queueing model with arrival rate $\lambda > 0$ and service rate $\mu > 0$. Let $\pi_k = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = k), k = 0, 1, 2 \cdots$ whenever it exists. Which of the following are true?

1. $\{X(t)\}$ is a birth and death process with birth rates $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, \ldots$ and death rates $\mu_k = \mu, k = 1, 2, \ldots$
2. $\{X(t)\}$ is a birth and death process with birth rates $\lambda_k = \frac{1}{\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots$ and death rates $\mu_k = \frac{1}{\mu}, k = 1, 2, \ldots$
3. Limiting distribution $\{\pi_k\}$ exists if and only if $\mu > \lambda$, and is the geometric distribution with parameter $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.
4. If an arriving customer finds exactly one customer, then his total waiting time in the system has an exponential distribution with parameter (2μ).